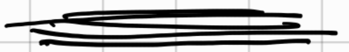
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 23 – 13.11.2023

MAPPA del PASTICCIERE (IN REALTA' TENDA)

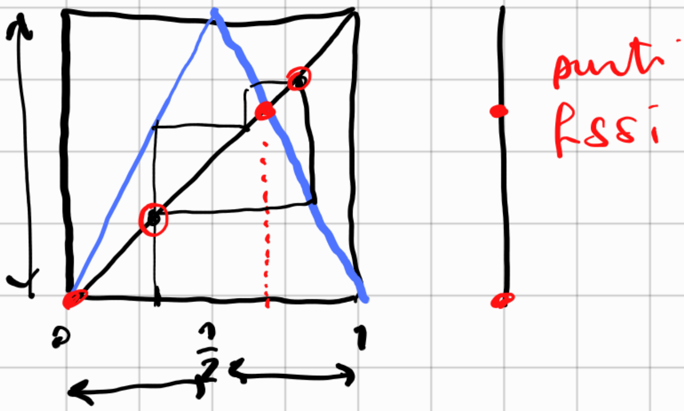
X 10 →  1024 strati

MATEMATICAMENTE:

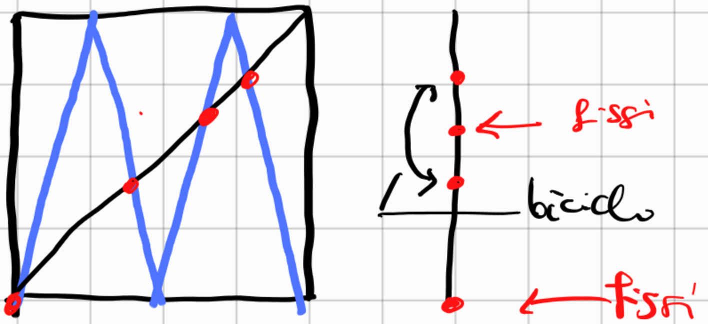
$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x\le \frac{1}{2}\\ 2(1-x) & \text{se } x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\left(=2\,\underset{\text{min}}{\cancel{\max}}\{x,1-x\}\right)$$

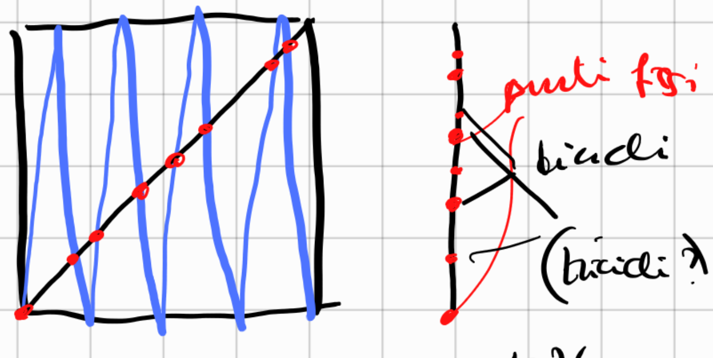
f^1:



$f^{\circ 2} = f\circ f$:

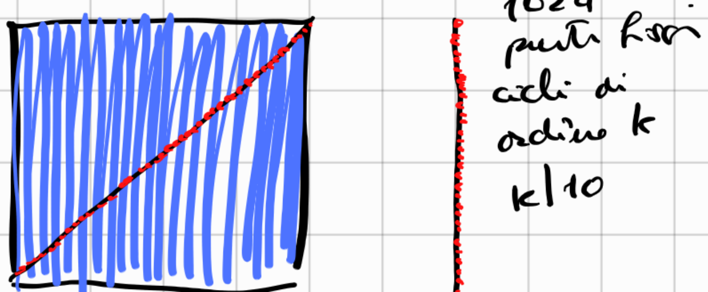


$f^{\circ 3} = f\circ f\circ f$:



$\vdots$

$$f^{\circ 10} = \overbrace{f\circ \ldots \circ f}^{10 \text{ volte}}$$



COMPORTAMENTO CAOTICO

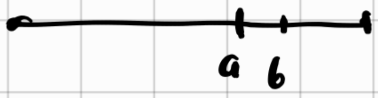
- f è un <u>miscuglio topologico</u> cioè (transitività topologica)

zona in arrivo

per ogni intervallo $(a,b) \subseteq [0,1]$ (a<b) $\forall$ intervallo $(c,d) \subseteq [0,1]$ (c<d) $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n > N$

mosca

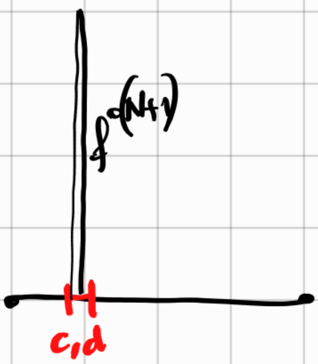
$$f^{\circ n}\big((c,d)\big) \cap (a,b) \neq \emptyset.$$



$\Rightarrow$ effetto "farfalla"

(ci sono però quantità medie che possiamo prevedere. (differenza tra meteo e clima))

- <u>idea del perché è vero:</u>



N t.c. $\frac{1}{2^N} < d-c$

cosicché (c,d) contiene una "spina" intera di $f^{\circ(N+1)}$

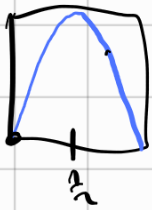
- <u>ogni punto di $(0,1)$ si trova "vicino" ad una orbita.</u>

La mappa logistica con $c=4$ (vedi lezione 21) ha le stesse proprietà (e quindi è caotica, nel senso di prima)

<u>idea</u>: con un cambio di variabile la <u>mappa logistica</u> diventa una <u>tenda</u>.

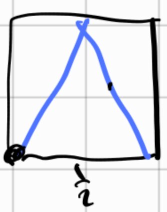
<u>mappa logistica</u>

$$a_{n+1} = f(a_n)$$



$$f(x) = 4x(1-x)$$

<u>mappa tenda</u>



$$b_{n+1} = g(b_n)$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Def Se esiste $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ bigettiva e continua, con inversa continua (omeomorfismo) tale che

$$a_n = \varphi(b_n)$$

cioè

$$f(a_n) = a_{n+1} = \varphi(b_{n+1}) = \varphi(g(b_n)) = \underbrace{\varphi(g(\varphi^{-1}}_{\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}}(a_n)))$$

$$\boxed{\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = f}$$

ovvero: $\varphi \circ g = f \circ \varphi$

diremo che f è coniugata topologica di g.

Esiste φ nel nostro caso?

$$0 \overset{f}{\underset{g}{\longmapsto}} 0 \qquad \varphi(0) = 0$$

$$\tfrac{1}{2} \overset{f}{\underset{g}{\longmapsto}} 1 \qquad \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$1 \overset{f}{\underset{g}{\longmapsto}} 0 \qquad \varphi(1) = 1$$

si potrebbe giustificare formalmente

su $[0, \frac{1}{2}]$ $\quad f(x) = 4x(1-x)$, $\quad g(x) = 2x$

cerco φ tale $\quad \varphi \circ g = f \circ \varphi$

$$\varphi(2x) = 4\varphi(x)\cdot(1-\varphi(x)) \quad \mathfrak{A}$$

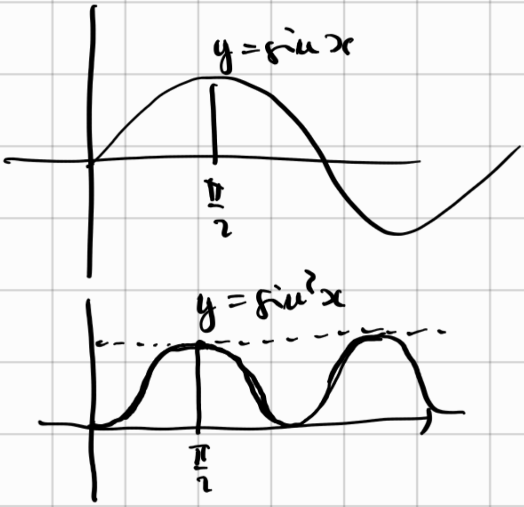
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

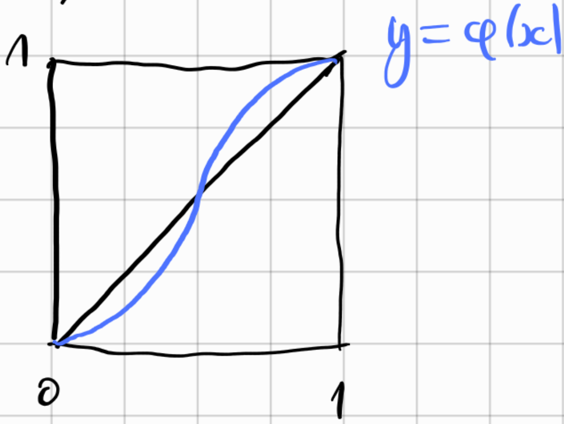
$$\sin^2(2x) = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4\sin^2 x(1-\sin^2 x)$$

$\varphi(x) = \sin^2 x$?? ma $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = ??$

$$\varphi(x) = \sin^2(mx)$$

$$\varphi(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$





f è g sono (!) topologicamente equivalenti.

Esercizio (**) Sia $g(x) = \begin{cases} 2x & x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$

$$g : [0,1] \to [0,1]$$

La successione

$$\begin{cases} b_0 = \alpha \\ b_{n+1} = g(b_n) \end{cases}$$

è periodica se e solo se $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(Suggerimento: scrivere x in base 2 e scrivere g usando le cifre binarie di x).

Successioni ricorsive lineari di ordine n.

$$\underbrace{a_{k+n} = c_0 \cdot a_k + c_1 a_{k+1} + \ldots + c_{n-1} a_{k+n-1}}_{\text{LINEARE}} \quad (\#)$$

ES Fibonacci $(n=2)$

$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$$

Come si risolve?

$$(*) \quad \boxed{F_{k+2} - F_{k+1} - F_k = 0}$$

in generale $\quad F_{k+n} - c_{n-1} F_{k+n-1} - \ldots - c_1 F_{k+1} - c_0 F_k = 0$

Prendiamo il polinomio con gli stessi coefficienti:

$$P(x) = x^n - c_{n-1} x^{n-1} - \ldots - c_1 x - c_0$$

per Fibonacci $\quad P(x) = x^2 - x - 1$

ES: $\boxed{a_{n+1} = \lambda a_n}$

Proviamo a porre $\quad F_k = \lambda^k \quad$ (per Fibonacci)

$$\Rightarrow \lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0$$

$$\lambda^k (\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

Se $P(\lambda) = 0$ allora ho una soluzione.

P si dice polinomio caratteristico.

Se P ha n zeri distinti ottengo n soluzioni distinte:

$$\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$$

Osservazione 1 Lo spazio di tutte le successioni

$$V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ (\text{o } \mathbb{C}^{\mathbb{N}})$$

è uno spazio vettoriale reale (o complesso)

Osservazione 2 Le soluzioni di (#) $W \subseteq V$

sono un sottospazio vettoriale.

Teorema 1 $\dim W = n$.

dim perché una soluzione è univocamente determinata da n condizioni iniziali.

$$\mathbb{R}^n \longleftrightarrow W \qquad \dim W = \dim \mathbb{R}^n = n$$

Teorema 2 Le successioni

$$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$$

sono linearmente indipendenti.

dim

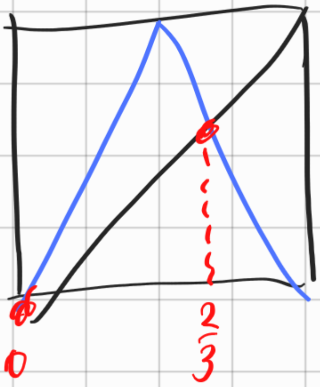
vedere sugli appunti.

Corollario Se le radici di P sono distinte ogni soluzione è combinazione lineare di $\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k$.

FINE LEZIONE

Es calcolo esplicito dei punti fissi di f, $f \circ f$ e $f \circ f \circ f$. (TENDA)

f

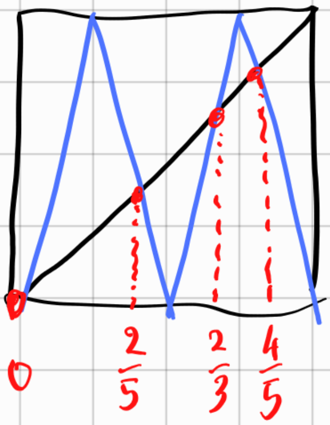


$$2-2x=x \qquad 3x=2 \qquad x=\frac{2}{3}$$

$$x \qquad (1-x)$$

$$2x \qquad 2(1-x)$$

$f \circ f$



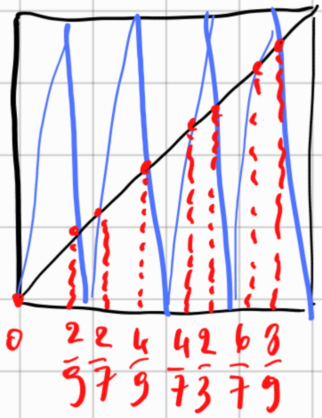
$$2-4x=x \qquad 5x=2 \qquad x=\frac{2}{5}$$

$$4-4x=x \qquad 5x=4 \qquad x=\frac{4}{5}$$

biciclo

$$\begin{tikzcd} \frac{2}{5} \arrow[r] & \frac{4}{5} \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

$f \circ f \circ f$



$$2-8x=x \qquad 9x=2 \qquad x=\frac{2}{9}$$

$$4-8x=x \qquad 9x=4 \qquad x=\frac{4}{9}$$

$$8x-4=x \qquad 7x=4 \qquad x=\frac{4}{7}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{2}{9} \arrow[r, mapsto] & \frac{4}{9} \arrow[r, mapsto] & \frac{8}{9} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

tricicli

$$\begin{tikzcd} \frac{4}{7} \arrow[r] & \frac{6}{7} \arrow[r] & \frac{2}{7} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{2}{3} \arrow[loop right] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

punti fissi

$f \circ f \circ f \circ f$ ha i 4 punti fissi di $f \circ f$ ed altri 12 punti fissi che dovranno essere suddivisi in 3 quadricicli di f.