ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 34 - 11.12.2023

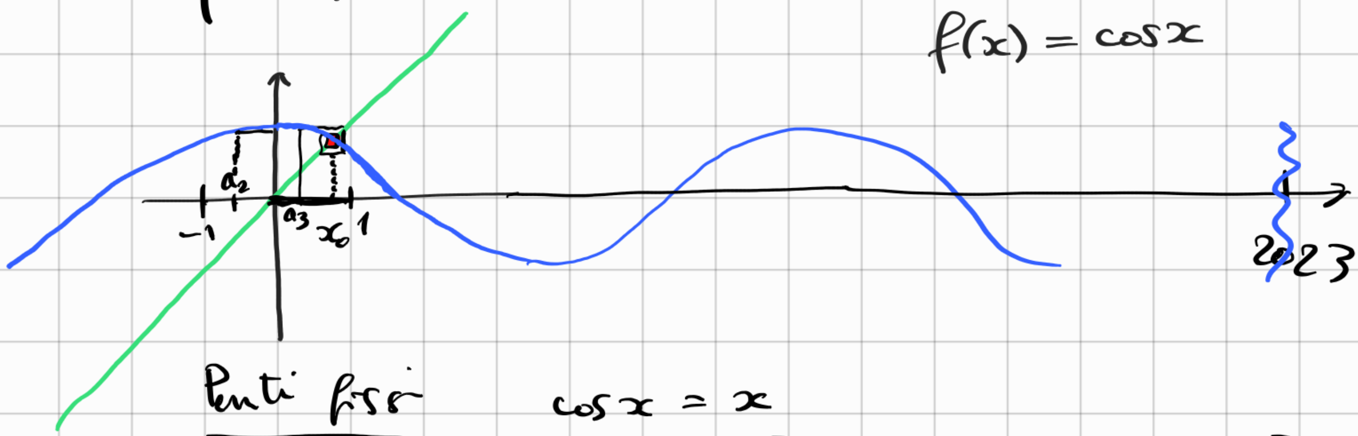
Es

$\sum\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ lo vedremo più avanti

Es $\begin{cases} a_1 = 2023 \\ a_{n+1} = \cos a_n \end{cases}$

$a_{n+1} = f(a_n)$

$f(x) = \cos x$



Punti fissi $\cos x = x$

$x \in [-1,1]$, $\cos x > 0$ $x \in [0,1]$

in $[0,1]$ $\cos x$ è strett. decrescente, x strett. crescente

$g(x) = \cos x - x$ è strettamente decrescente $\left(g'(x) = -\sin x - 1 < 0\right)$

$g(0) = 1$ $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$

per il teorema dei valori intermedi $\exists\, x_0 : g(x_0) = 0$

g strett. decresc. $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow \exists!\, x_0 : g(x_0) = 0$

$a_1 = 2023$ $a_2 = \cos 2023 \in [-1,1]$ $\cos(-x) = \cos x$

$a_3 = \cos\cos 2023 \in [0,1]$ $\cos([-1,0]) = \cos([0,1])$

perché $[0,1]$ è invariante:

$0 \le x \le 1$

$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\cos 0} \ge \cos x \ge \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\cos 1}$

cos è strett decr. su $[0,1]$

① Metodo + astratto (teorema delle contrazioni)

vorrei dire che $f(x) = \cos x$ è una contrazione su $I=[0,1]$.

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq L\,|x_1-x_2| \quad \text{lipschitz}$$
$L<1$ (contrazione)

Criterio di lipschitzianità

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se $|f'(x)|\leq L$
allora f è L-lipschitziana.

dim

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \overset{\text{Lagrange}}{=} |f'(x_3)| \leq L$$

Nel nostro caso $f'(x)=-\sin x$
per $x\in[0,1]$ $\quad |f'(x)| = \underbrace{\sin x}_{\text{crescente}} \leq \sin 1 = L < 1$.

Per il teorema delle contrazioni: $a_n \to x_0$ $\square$

② Metodo brutale

$I=[0,1]$ è invariante (come prima)
$f(x)=\cos x$ è strettamente decrescente su I

Teo $\Rightarrow$ a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone.
una crescente, l'altra decrescente.

$a_3\in[0,1] \Rightarrow a_n\in[0,1]$

$a_{2n}\to l$ $\qquad a_{2n+2}=f(f(a_{2n}))$
$a_{2n+1}\to l'$ $\qquad a_{2n+3}=f(f(a_{2n+1}))$

l e l' sono punti fissi di $f\circ f$
$f(f(x))=\cos\cos x$.

x_0 è punto fisso di $f \Rightarrow$ anche di $f\circ f$.

Devo risolvere $f(f(x)) = x$

$$g(x) = f(f(x)) - x = 0$$

$$g(x) = \cos(\cos x) - x \qquad g : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$g'(x) = +\sin(\cos x) \cdot (+\sin x) - 1 < 0$$

$x \in [0,1] \Rightarrow \cos x \in [\cos 1, 1]$

$\sin x \in [0, \sin 1]$

$\sin \cos x \in [\sin \cos 1, \sin 1]$

$\sin \cos x < \sin 1 < 1.$

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = \cos(1) - 0 > 0 \\ g(1) = \cos\cos 1 - 1 < 0 \end{array}\right\} \quad \exists !\, x_1 \text{ t.c.}$$

$$g(x_1) = 0$$

$$\parallel$$

$$f(f(x_1)) - x_1$$

$$f(f(x_1)) = x_1$$

ma anche $f(f(x_0)) = x_0$ $\Rightarrow x_1 = x_0$

$$\parallel$$

$$f(x_0) = x_0$$

Dunque $l = l' = x_0 \Rightarrow \begin{cases} a_{2n} \to x_0 \\ a_{2n+1} \to x_0 \end{cases} \Rightarrow a_n \to x_0$ $\square$

[Ricevimento aggiuntivo MER 8^{30} AULA B1]

Studio di funzione (è uno strumento)

- ottimizzazione (trovare massimi e/o minimi)
- trovare le soluzioni di una equazione
  - ↳ quante sono
- risolvere disequazioni
- ....

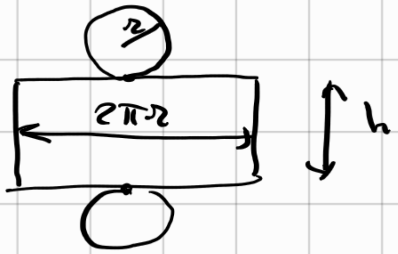
---

esempio ottimizzazione

Trovare le dimensioni ottimali di una lattina cilindrica di volume 33cl in modo da minimizzare l'alluminio utilizzato.

V = fissato = 33 cl

$S_{TOT} \to$ min.



$$V = \pi r^2 \cdot h \longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S_{TOT} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$S_{TOT} = f(r) = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$= \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \longrightarrow \text{minimizzare!}$$

Dominio: $r>0$ (lo dice il problema!) $0<r<+\infty$

Segno: $f(r)>0$

limiti agli estremi del dominio:

$$\begin{cases} \lim_{r\to 0^+} f(r) = +\infty \\ \lim_{r\to +\infty} f(r) = +\infty \end{cases}$$

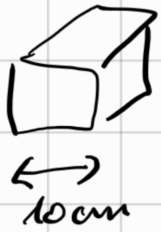
Se c'è un minimo (Fermat) $f'=0$ nel minimo

$$f'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r \overset{(\gtrless)}{=} 0$$

$$\frac{2V}{r^2} = 4\pi r \qquad \frac{2V}{4\pi} = r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{33\cdot 10\,cm^3}{2\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{330}{2\pi}}\ cm \cong 3{,}75\,cm$$



$1\,\ell = 1000\,cm^3$

$1\,dl = 10\,cm^3$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \ldots\ldots \cong \ldots\ldots\ cm$$

Per Weierstraß generalizzato un minimo esiste.
Per Fermat nei minimi la derivata si annulla.

$\Rightarrow$ $r = \sqrt{\frac{330}{2\pi}}$ è l'unico minimo.

Oppure concludo lo studio di funzione.

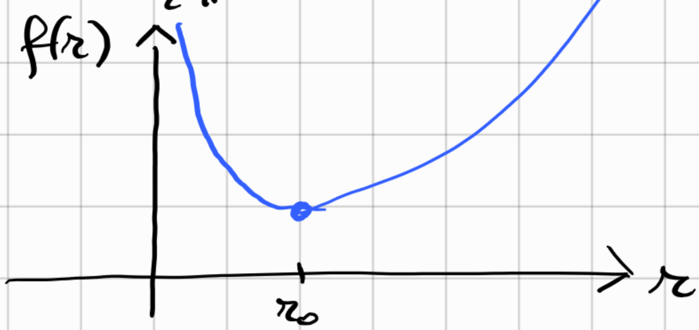
$$f'(r) \gtrless 0 \qquad -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r \gtrless 0$$

$$4\pi r \gtrless \frac{2V}{r^2} \qquad 4\pi r^3 \gtrless 2V$$

$$r^3 \gtrless \frac{2V}{4\pi} \qquad r \gtrless \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = r_0$$

← punto critico

r:		r_0	
$f'(r)$:	$-$	0	$+$
$f(r)$	$\searrow$	min	$\nearrow$



Dalla tabella col segno di f' si deduce che x_0 è minimo (assoluto) di f.

Criterio di monotonia: (1) f è strettamente crescente su $[x, +\infty)$

(2) f è strettamente decrescente su $(0, x]$

Se $x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Se $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

$\Rightarrow x$ è minimo (stretto) su tutto $(0, +\infty)$. $\square$

ES. risolvere una equazione

$$e^x = x^4$$

Quante soluzioni ha? Come le trovo? (prossima volta)

Studio $f(x) = e^x - x^4$

ES. risolvere una disequazione

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Studio: $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.