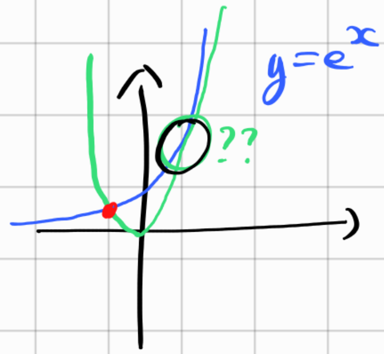
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 35 – 13.12.2023

<u>Es</u> Risolvere $\boxed{e^x = x^4}$ (*)



Potrei studiare $e^x - x^4$

oppure $\frac{e^x}{x^4}$

oppure $x = \ln x^4$ $(x \neq 0)$

e studio $x - 4\ln|x|$

$$f(x) = \boxed{x - 4\ln|x|}$$

Le soluzioni di (*) coincidono con gli zeri di f.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x} \gtrless 0 \qquad 1 \gtrless \frac{4}{x}$$

se $x > 0$ $\quad x \gtrless 4$

se $x < 0$ $\quad x \lessgtr 4$

x		0		4	
f'	+	∄	−	0	+
f	↗	|	↘	min loc	↗

limiti agli estremi del dominio:

$x \to -\infty$ $\quad f(x) \to -\infty$

$x \to 0$ $\quad f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ $\quad f(x) \to +\infty$

$$f(4) = 4 - 4\ln 4 = 4(1 - \ln 4) < 0$$

$$\ln 4 > \ln e = 1$$

- Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ f è strett. crescente quindi iniettiva $\Rightarrow$ si annulla al più una volta (ristretta a questo intervallo)

Ma $f(-\infty) < 0$ $f(0^-) > 0$

i limiti

Per la permanenza del segno esiste a (molto negativo) tale che $f(a) < 0$.
ed esiste $b < 0$ (vicino a 0) in cui $f(b) > 0$
Su $[a, b]$ applico il Teorema degli zeri esiste almeno un punto in cui si annulla.

$\Rightarrow \exists!\, x_1 < 0$ t.c. $f(x_1) = 0$.

- Su $(0, 4]$ f è strett. decrescente
posso includere 4 anche se $f'(4) = 0$.
è iniettiva (ristretta a $(0, 4]$) dunque si annulla al più una volta.
Per il teorema degli zeri (applicato a $[c, 4]$ con $f(c) > 0$) si annulla almeno una volta
$(f(4) < 0)$

$\exists!\, x_2 \in (0, 4]$ t.c. $f(x_2) = 0$. $\quad x_2 < 4$

- Stesso ragionamento su $[4, +\infty)$

$\exists!\, x_3 \in [4, +\infty)$ t.c. $f(x_3) = 0$ $\quad x_3 > 4$

$\Rightarrow 3$

L'equazione (*) ha tre soluzioni (distinte)

Ho risolto l'equazione?

Cosa significa risolvere una equazione?

$\boxed{x^2 = 2}$ $\qquad$ $\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$ $\leftarrow$ $\sqrt{2}$ è per definizione la sol. positiva di $x^2 = 2$.

$x^2 = 4$ $\qquad$ $x = \pm 2$ $\qquad$ $\sqrt{4} = 2$

$\sin\frac{\pi}{3} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 1$

$\sum \frac{1}{n^2} \overset{?}{=} \frac{\pi^2}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Obiezione se P è un polinomio le soluzioni di $P(x)=0$ potrei scriverle usando i radicali? NO

Storia Cardano, Tartaglia, Scipione del Ferro.

$x^3+3x+2=0$ $\qquad$ $x = \sqrt[3]{\;+\sqrt{\;}} + \sqrt[3]{\;-\sqrt{\;}}$

$x^4+x^3+1=0$ $\qquad$ $x =$

$x^5+x+1=0$ $\qquad$ le soluzioni non sono esprimibili tramite radicali (Ruffini – Abel? – Galois)

Obiezione ma $\sqrt{2}$ lo posso calcolare con la calcolatrice.

Ma lo stesso posso fare con x_1, x_2, x_3 le soluzioni di (*).
usando il metodo di bisezione.

Esempio. Sia x_1 come sopra.
Dire se $x_1 > -1$.

Sappiamo che $x_1 < 0$
e che f è crescente su $(-\infty, 0)$.

$$f(-1) = -1 - 4\ln|-1| = -1 < 0$$

Se fosse $-1 \geq x_1$ avrei $f(-1) \geq f(x_1) = 0$
ma $f(-1) < 0$

dunque $-1 < x_1$.

Esempio. Ho delle proprietà algebriche di questi numeri. Ad esempio $\ln x_2 = \frac{x_2}{4}$

Risoluzione di una disequazione.

ES $\quad e^x \geq \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}$ $\quad (**)$ $\quad$ ma sappiamo che $e^x = \underbrace{\sum \frac{x^k}{k!}}$

dunque $\quad e^x \geq \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}$ $\quad$ se $x > 0$

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Ma non è del tutto ovvio se $x < 0$.

Lo risolviamo con uno studio di funzione:

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

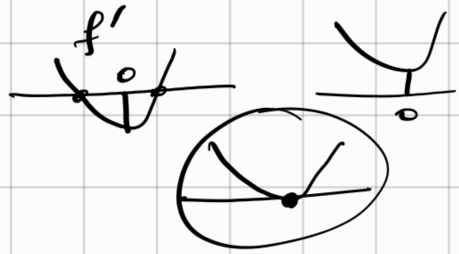
$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

$f''(x) = e^x - 1$

$f''(x) \gtrless 0 \iff x \gtrless 0$

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

che segno ha f' ?



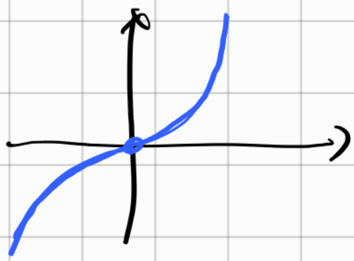
$f'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$

		0	
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

f è strettamente crescente su $(-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty)$
quindi è strettamente crescente su $(-\infty, +\infty)$

$f(0) = e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} = 0$

f	$\nearrow$	0	$\nearrow$
f	$-$	0	$+$



$f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$

$\Updownarrow$

$(**)$

Risolvere $\quad z^2 = \bar{z}$

$z = x + iy \qquad z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\bar{z} = x - iy$

$$\boxed{x^2-y^2}+\boxed{2ixy}=\boxed{x}-\boxed{iy}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=x \\ 2xy=-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2=x \end{cases} \begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad z_1=0 \\ \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \quad z_2=1 \end{array}$$

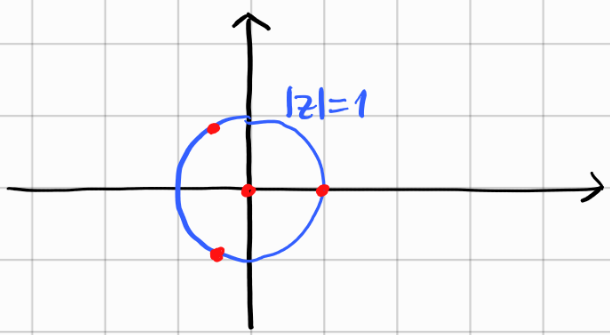
$$\rightarrow \begin{cases} 2x=-1 \\ x^2-y^2=x \end{cases} \quad y\neq 0 \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-y^2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y^2=\frac{3}{4} \qquad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

ho 2 soluzioni $z=0$, $z=1$.



C'è una interpretazione geometrica?

$$z^2=\bar{z} \iff z^3=\bar{z}z=|z|^2 \qquad \left||z|^2\right|=|z|^2$$

$$|z^3|=|z|^3 \qquad |z|^3=|z|^2$$

$$|z|=\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\boxed{z^3=1}$$

Alternativa

$$z=\rho e^{i\theta} \qquad z^2=\rho^2 e^{i2\theta}$$

$$\bar{z}=\rho e^{-i\theta}$$

$$\rho^2 e^{i2\theta}=\rho e^{-i\theta} \qquad \begin{cases} \rho^2=\rho \\ 2\theta=-\theta+2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho=0 \\ \sim \end{cases} \quad z_1=0$$

$$\begin{cases} \rho=1 \\ 3\theta=2k\pi \end{cases} \qquad \theta=\frac{2}{3}k\pi$$

$$z_2 = e^{i\frac{2}{3}\cdot 0\pi} = e^0 = 1$$

$$z_3 = e^{i\frac{2}{3}1\cdot\pi} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$z_4 = e^{i\frac{2}{3}\cdot 2\pi} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_5 &= e^{i\frac{6}{3}\pi} = e^{i2\pi} = 1 = z_2 \\ z_6 &= z_3 \\ z_7 &= z_4 \\ &\vdots \end{aligned}}$$