ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 39 - 12.1.2024

Formula di Taylor (con resto di Peano)

P pol. di Taylor per f di ordine n centrato in x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad \text{ovvero} \quad f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Questa è una caratterizzazione di P. di Taylor:

Se Q è un polinomio di grado $\leq n$
e vale

$$f(x) = Q(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Allora $Q = P$ pol. di Taylor.

dim (viceversa della formula di Taylor)

Per ipotesi $\quad \frac{f(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$

Sappiamo $\quad \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$

Facendo la differenza:

$$\frac{P(x)-Q(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$$

$P-Q$ è un polinomio con grado $\leq n$.

$$P(x)-Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

Idea: $(x_0 = 0)$

$x \to 0$

$$\frac{a\cancel{x^2} + b\cancel{x} + c}{x^2} \to 0 \qquad c = 0$$

$$\frac{ax^2 + bx}{x^2} = \frac{ax + b}{x} \to 0 \qquad b = 0$$

---

per $x \to x_0$ $\quad P(x) - Q(x) \to P(x_0) - Q(x_0) = a_0$

se fosse $a_0 \neq 0$

$$\left| \frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} \right| \to +\infty$$

dunque $a_0 = 0$.

$$\frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k (x - x_0)^{k-1}}{(x - x_0)^{n-1}}$$

ripeto il ragionamento. Se non fosse $a_1 = 0$ il limite sarebbe ∞ .....

Come si usa la formula di Taylor?

Come si opera con gli o-piccolo.

$$o(g) = \left\{ f : \frac{f}{g} \to 0 \text{ per } x \to x_0 \right\} \qquad \text{per } x \to x_0$$

Nota $o(g)$ è un sottospazio vettoriale di funzioni.

Cosa significa: $\underbrace{\sin x \overset{\in}{=} \boxed{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}}$

Come in algebra lineare: $V + x = \{ v + x : v \in V \}$

$\lambda V = \{ \lambda v : v \in V \}$

si intende (in realtà) $\sin \in \left\{ x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x) : \frac{\varepsilon}{x^3} \to 0 \right\}$

<u>Esempio</u> $x^2 \overset{\in}{=} o(x) \overset{\text{per } x\to 0}{V}$ si intende $x^2 \in o(x)$

ovvero $\frac{x^2}{x} \to 0$ per $x \to 0$

$x\sqrt{x} \overset{\in}{=} o(x)$ ma $x^2 \neq x\sqrt{x}$

[<u>Esempio</u> per $x \to +\infty$ $x \in o(x^2)$]

<u>Oss</u> 7. V sp. vettoriale. $7V = V$

$V + V = V$

$V - V = V + V = V$

dunque: $o(x) + 3\,o(x) = o(x)$

$o(x) - o(x) = o(x)$

<u>Es</u>: Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 per $x \to 0$ della funzione:

$$f(x) = x \cdot \sin x + 2\cos x$$

$$\overset{\in}{=} x \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)$$

$$\overset{\subseteq}{=} \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} + \underbrace{x \cdot o(x^3)}_{?} + 2 - \cancel{x^2} + \underbrace{2 \cdot o(x^3)}_{o(x^3)}$$

$g \in x \cdot o(x^3) \overset{\subseteq}{=} o(x^4) \leftarrow$ dimostriamo.

$g = x \cdot f(x)$ con $\frac{f}{x^3} \to 0$

$$\frac{g}{x^4} = \frac{x \cdot f(x)}{x^4} = \frac{f(x)}{x^3} \to 0$$

In generale: $f \cdot o(g) = o(f \cdot g) = f \cdot g \cdot o(1)$

$$\overset{\subseteq}{=} 2 - \frac{x^4}{6} + \underbrace{\cancel{o(x^4)} + o(x^3)} \subseteq 2 - \frac{x^4}{6} + \underbrace{o(x^3) + o(x^3)}_{o(x^3)}$$

$$\overset{\subseteq}{=} 2 - \cancel{\frac{x^4}{6}} + o(x^3) \overset{?}{\overset{\subseteq}{=}} 2 + o(x^3)$$

$o(x^4) \boxed{\subseteq} o(x^3)$ (per $x \to 0$)

f $\quad \frac{f}{x^4} \to 0 \qquad \frac{f}{x^3} = \frac{f}{x^4} \cdot x \to 0$

⚠ Se $x \to +\infty$ è il contrario $o(x^3) \subseteq o(x^4)$

⚠ Scriveremo: $o(x^4) = o(x^3)$

ma non: $o(x^3) \cancel{=} o(x^4)$

$$x \sin x + 2\cos x \overset{\in}{=} 2 + o(x^3)$$

Per la caratterizzazione vista prima

$P(x) = 2$ è il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ per la funzione $f(x) = x \sin x + 2\cos x$. $f(0) = 2$ ✓

<u>Verifica</u> $f'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \cancel{\cos x} + \cancel{\cos x} - x\sin x - 2\cancel{\cos x}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\sin x - x\cos x$$

$$f'''(0) = 0.$$

<u>Nota</u>. Come si decide a che ordine sviluppare le funzioni elementari?

Con l'esperienza.

MA non posso sbagliare:

(a) se sviluppo troppo: ottengo il risultato giusto facendo più fatica.

(b) se sviluppo troppo poco: non ottengo niente. Capisco che devo sviluppare di più.

<u>ES</u>

$$x\sin x + 2\cos x = x\left(x + o(x)\right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{x^2} + o(x^2) + 2 - \cancel{x^2} + \cancel{2o(x^3)}$$

$$= 2 + o(x^2)$$

Questo mi dice solo che $P = 2$ è il P. di Taylor di ordine 2. Ma non posso dire qual è il P. di Taylor di ordine 3.

<u>ES</u> Sforzo minimo:

$$x\sin x + 2\cos x = x\left(x + o(x^2)\right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{x^2} + o(x^3) + 2 - \cancel{x^2} + o(x^3)$$

$$= 2 + o(x^3).$$

ES Calcolare: $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{1-\cos(x^2)}$

$$\frac{x\sin x - x^2}{1-\cos(x^2)} = \frac{x\cdot\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \cancel{x^2}}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2)\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} \longrightarrow \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Come si giustifica:

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2)$$
$t = x^2$

So che $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$\boxed{t = x^2}$ $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o((x^2)^2)$ per $x \to 0$

Devo giustificare: se $f(t) \in o(t^2)$

allora $f(x^2) \in o((x^2)^2)$

Verifica

$$\frac{f(x^2)}{(x^2)^2} \overset{x^2=t}{=} \frac{f(t)}{t^2} \longrightarrow 0$$

$f \in o(t^2)$

Basta controllare che quando $x \to 0$ anche $t \to 0$

⚠ $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$$\cos(x+1) = 1 - \frac{(x+1)^2}{2} + o\left((x+1)^2\right)$$

per $x \to -1$

$$x+1 = t$$

Cosa facciamo se voglio il P. di Taylor di ordine 2 $\cos(x+1)$ con $x \to 0$?

2 possibilità.

(a) Uso la definizione:

$f(x) = \cos(x+1) \qquad f(0) = \cos 1$

$f'(x) = -\sin(x+1) \qquad f'(0) = -\sin 1$

$f''(x) = -\cos(x+1) \qquad f''(0) = -\cos 1$

$$P_2(x) = \cos 1 - (\sin 1)x - \frac{\cos 1}{2}x^2$$

(b) $\cos(x+1) = \cos x \cdot \cos 1 - \sin x \sin 1$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\cos 1 - \left(x + o(x^2)\right)\sin 1$$

$$= \cos 1 - x \cdot \sin 1 - \frac{x^2}{2}\cos 1 + o(x^2) - \cancel{o(x^2)}$$ □

Casi più complicati di cambio di variabile:

ES $\quad f(x) = \cos(\sin x)$

Trovare il P. di Taylor di ordine 4 per $x \to 0$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$t = \sin x \qquad$ se $x \to 0 \qquad t \to 0$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \text{ per } t \to 0$$

$$\cos \sin x = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o(\sin^4 x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{1}{24}\left(x + o(x)\right)^4 + o(x^4)$$

$f \sim g$

$o(f) = o(g)$

$\frac{h}{f} = \frac{h}{g} \cdot \frac{g}{f}$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right] + \frac{1}{24}\left(x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$(A+B+C)^2 = (A+B+C)\cdot(A+B+C)$$

$$= A^2 + 2AB + 2AC + \boxed{B^2 + 2BC + C^2}$$

$$(x + o(x))^4 = x^4 + 4x^3 o(x) + 6x^2 (o(x))^2 + 4x(o(x))^3 + (o(x))^4$$

11

121

1331

14641

$$= x^4 + 4o(x^4) + 6o(x^4) + 4o(x^4) + o(x^4)$$

$$= x^4 + o(x^4).$$

$$o(x)\cdot o(x) = o(o(x)\cdot x) = o(o(x^2)) = o(x^2)$$

$\boxed{\text{per casa}}$

$$\| $$

$$(o(x))^2 = o(x^2)$$