ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 58 - 26.2.2024

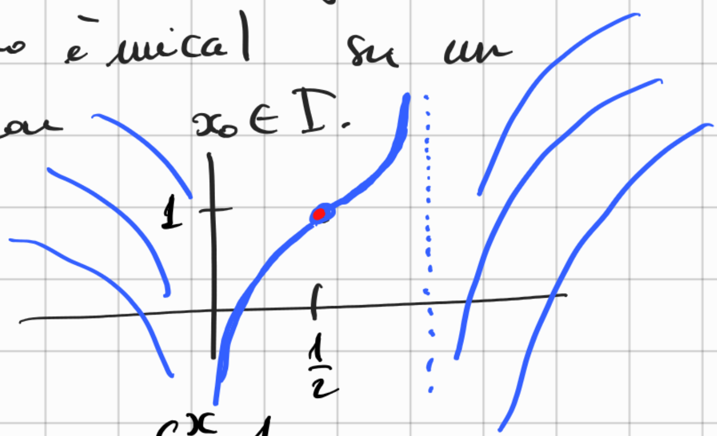
Eq. differenziali. Metodi risolutivi.

1. Integrali. $\quad u' = f \qquad u = \int f$

Problema di Cauchy: $\begin{cases} u' = f \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\quad u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

condizione iniziale

Oss: Le soluzioni di un problema di Cauchy si considerano definite (e dimostreremo che è unica) su un intervallo I con $x_0 \in I$.



Es

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{x(1-x)} \\ u\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$u(x) = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{t(1-t)}\,dt$$

è l'unica soluzione nell'intervallo $(0,1)$.

infatti: $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

$u\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 = 1.$ $\quad$ è sol.

E' l'unica soluzione. se $v'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$ nell'intervallo $(0,1)$ u e v hanno la stessa derivata: $(u-v)' = 0$

$v(x) = u(x) + c \qquad c = \text{cost. su } (0,1).$

$v\left(\frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}\right) + c \implies c = 0.$

Eq. lineari del I ordine:

$$(*) \qquad u'(x) + a(x)\cdot u(x) = b(x) \qquad \forall x.$$

Una eq. è lineare se può essere scritta nella forma:

$$L[u] = b \qquad [a\,x = b]$$

con L operatore lineare su $C^1(I)$ dove I è un intervallo.

Affinché u soddisfi $(*)$ u deve essere definita su un intervallo I. Dovrà essere derivabile su I

Visto che $u'(x) = -a(x)\cdot u(x) + b(x)$
Se a e b sono funzioni continue, u è pure continua (perché derivabile) $\Rightarrow$ u' è continua.
$\Rightarrow u \in C^1$

$$L : C^1(I) \to C^0(I) \qquad L[u] = u' + a\cdot u$$

con $a \in C^0(I)$,
$b \in C^0(I)$.

$$(*) \qquad L[u] = b$$

L è lineare:

$$\begin{cases} L[u+v] = (u+v)' + a\cdot(u+v) \\ \quad = u' + v' + au + av \\ \quad = Lu + Lv \\ L[\lambda u] = (\lambda u)' + a\cdot(\lambda u) \\ \quad = \lambda u' + \lambda\, au \\ \quad = \lambda\, L[u]. \end{cases}$$

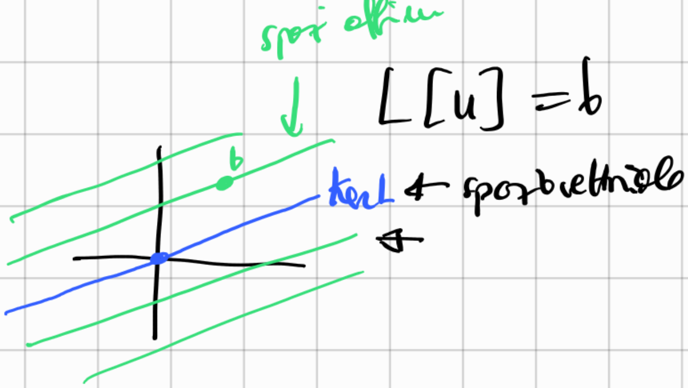
$(*)$ è in forma "normalizzabile"

anche $\quad au' + bu = c$

è lineare.

Si può normalizzare: $u' = -\frac{b}{a} u + \frac{c}{a}$

solo se $a(x) \neq 0 \quad \forall x$.



$L[u] = b$ se $b = 0$ diremo che l'eq. (lineare) è **OMOGENEA**.

altrimenti diremo che l'eq. (lineare) è **NON OMOGENEA**.

E questo significa anche che u è scalare

$u: I \to \mathbb{R}^d \quad d = 1$.

Se u fosse un vettore: $\underline{u}: I \to \mathbb{R}^d \quad d > 1$

(*) si chiama **SISTEMA lineare**:

$$\underline{u}'(x) + A(x) \cdot \underline{u}(x) = \underline{b}(x) \qquad A: I \to \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \underline{b}: I \to \mathbb{R}^d$$

è un sistema di eq. scalari:

$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}' + \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ & \ddots & \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_d(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b^d(x) \end{pmatrix}$$

Metodo Risolutivo:

$$\underbrace{u'(x) + a(x) \cdot u(x)}_{\text{assomiglia alla derivata di un prodotto}} = b(x)$$

$$(u(x)\cdot f(x))' = u'(x)\cdot f(x) + u(x)\cdot f'(x)$$

FATTORE INTEGRANTE:

$$\underbrace{u'(x)\cdot e^{A(x)} + a(x)\,u(x)\cdot e^{A(x)}} = b(x)\,e^{A(x)}$$

$$\left(u(x)\cdot e^{A(x)}\right)' = b(x)\cdot e^{A(x)}$$

se $A(x) \in \int a(x)$, $A'(x) = a(x)$

$$u(x)\, e^{A(x)} \in \int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx$$

$$u(x) = e^{-A(x)} \int b(t)\cdot e^{A(t)}\,dt$$

Es 1.

$$u'(x) = \lambda\cdot u(x).$$ $\lambda \in \mathbb{R}$. fissato.

$$Du = \lambda u$$

$$u'(x) - \lambda u(x) = 0$$ $a(x) = -\lambda$

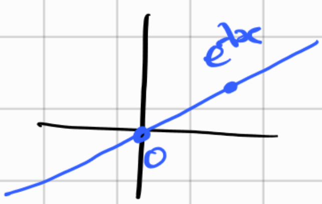
$b(x) = 0$

$$u'(x)\cdot e^{-\lambda x} - \lambda\, u(x)\, e^{-\lambda x} = 0.$$ $A(x) = \int(-\lambda) = -\lambda x$

$$\left(u(x)\cdot e^{-\lambda x}\right)' = 0$$

$\exists c \in \mathbb{R}$ $$u(x)\cdot e^{-\lambda x} = c$$

$$u(x) = c\cdot e^{\lambda x}$$ $\forall$ tutte le sol.



Per casa: $u'(x)+3u(x)=x$

Es 2

$$\boxed{u' - \frac{u}{x} = x^2}$$

$$u' e^{-\ln|x|} - \frac{u\, e^{-\ln|x|}}{x} = x^2 e^{-\ln|x|}$$

$a(x) = -\frac{1}{x}$

$b(x) = x^2$

$A(x) = -\int \frac{1}{x} = -\ln|x|$

$$\frac{u'}{|x|} - \frac{u}{x\cdot|x|} = \frac{x^2}{|x|}$$

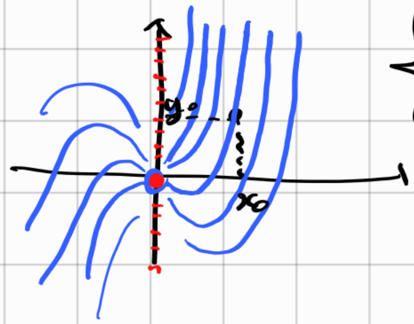
se $x<0$ moltiplico per $-|x| = x$

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = x$$

$$\left(\frac{u}{x}\right)' = x \qquad \frac{u}{x} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$u(x) = \frac{x^3}{2} + cx$$

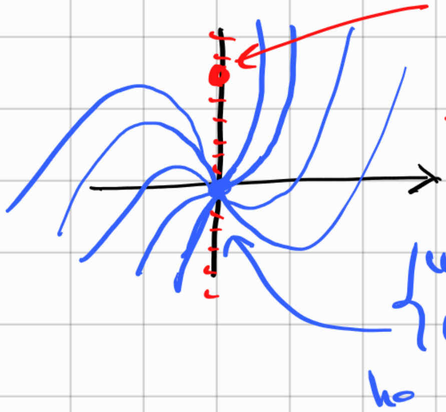
$x \neq 0$



$$\begin{cases} u' = \frac{u}{x} + x^2 \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se l'eq. fosse stata in forma non normale:

$$\begin{cases} u'\cdot x = u + x^3 \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Non ho soluzioni $\begin{cases} u'\cdot x = u + x^3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$!

$\begin{cases} u' x = u + x^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ ho infinite soluzioni!

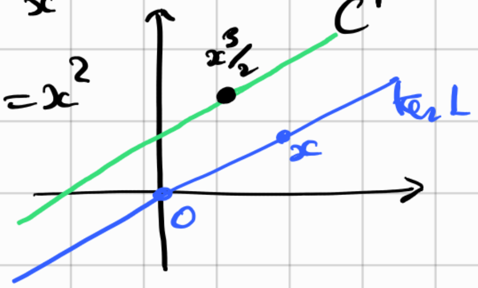
Oss! Le soluzioni di una eq. lineare sono definite dove sono definiti i coefficienti.

(le soluzioni sono globali)

Oss 2 La soluzione di $u' - \frac{u}{x} = x^2$

$$u(x) = \frac{x^3}{2} + c\,x.$$

$L[u] = x^2$



L'equazione omogenea "associata"

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \qquad L[u] = 0$$

ha soluzioni

$$u(x) = c \cdot x$$

$L[u] = u' - \frac{u}{x}, \; b = x^2$

* Ogni soluzione della "non omogenea" si ottiene prendendo una sol. particolare della non-omogenea e sommando tutte le sol. della "omogenea".

Se u_1 e u_2 sono sol. di $L[u] = b$

$$L[u_1] = b$$
$$L[u_2] = b$$
$$L[u_1 - u_2] = L[u_1] - L[u_2] = b - b = 0$$

$u_1 - u_2$ è sol. dell'omogenea.

Per casa (vedi appunti):
$$u' + \frac{u}{(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg} x} = 1$$

EQ. A VARIABILI SEPARABILI (I ordine)

Esempio
$$u'(x) = x^2 \cdot e^{u(x)}$$

$$u' = \underbrace{x^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{dipende solo} \\ \text{da } x}} \cdot \underbrace{e^u}_{\text{dipende solo da } u.}$$

$$\frac{u'(x)}{e^{u(x)}} = x^2$$

$$\int \frac{u'(x)}{e^{u(x)}}\, dx = \int x^2\, dx$$

$u = u(x)$

$du = u'(x)\, dx$

su ogni intervallo

$$\int \frac{1}{e^u}\, du \Big|_{u=u(x)} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$-e^{-u(x)} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$u(x) = -\ln\left(-\frac{x^3}{3} - c\right)$$

LE NOTAZIONI SONO STATE SCELTE BENE:

$$u' = x^2 \cdot e^u$$

$$\frac{du}{dx} = x^2 e^u$$

$$\text{"} \quad \frac{du}{e^u} = x^2\, dx \quad \text{"}$$

$$\int \frac{du}{e^u} = \int x^2\, dx.$$

$$-e^{-u} = \frac{x^3}{3} + c$$

ES

$$u' = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

NON HA SOLUZIONE