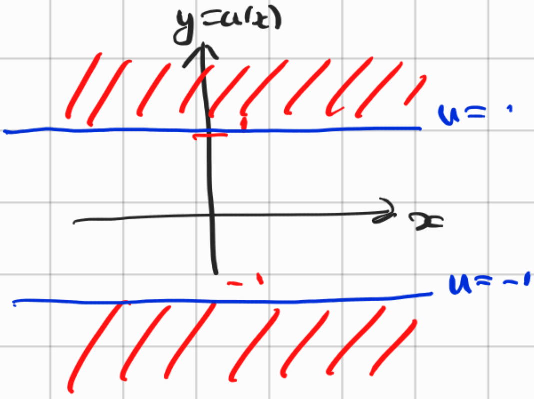
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 60 — 1.3.2024

Esercizio [non unicità] Trovare tutte le soluzioni

$$u'(x) = \sqrt{1-u^2(x)} \cdot x$$



$u(x)=1$
$u(x)=-1$ sono soluzioni

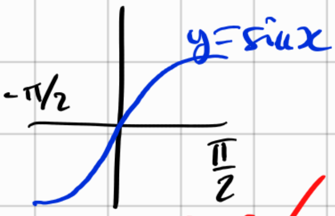
in ogni intervallo in cui $u^2(x)\neq 1$ (*)
posso scrivere:

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = x$$

$$\int \frac{u'(x)\,dx}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \int x\,dx$$

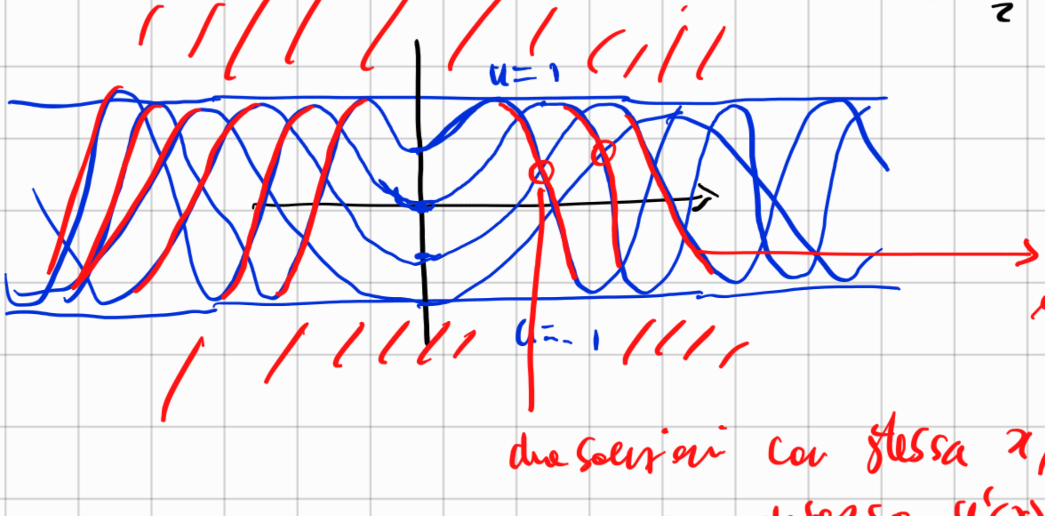
$u=u(x)$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{x^2}{2}+c$$



$$\arcsin u(x) = \frac{x^2}{2}+c$$

$$u(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$



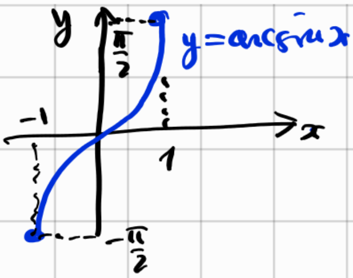
$u' = \sqrt{\cdots}\cdot x$

$u'<0$ non è possibile se $x>0$

due soluzioni con stessa x, stessa $u(x)$ ma diverso $u'(x)$. NON È POSSIBILE.

errore: la funzione inversa di arcsin

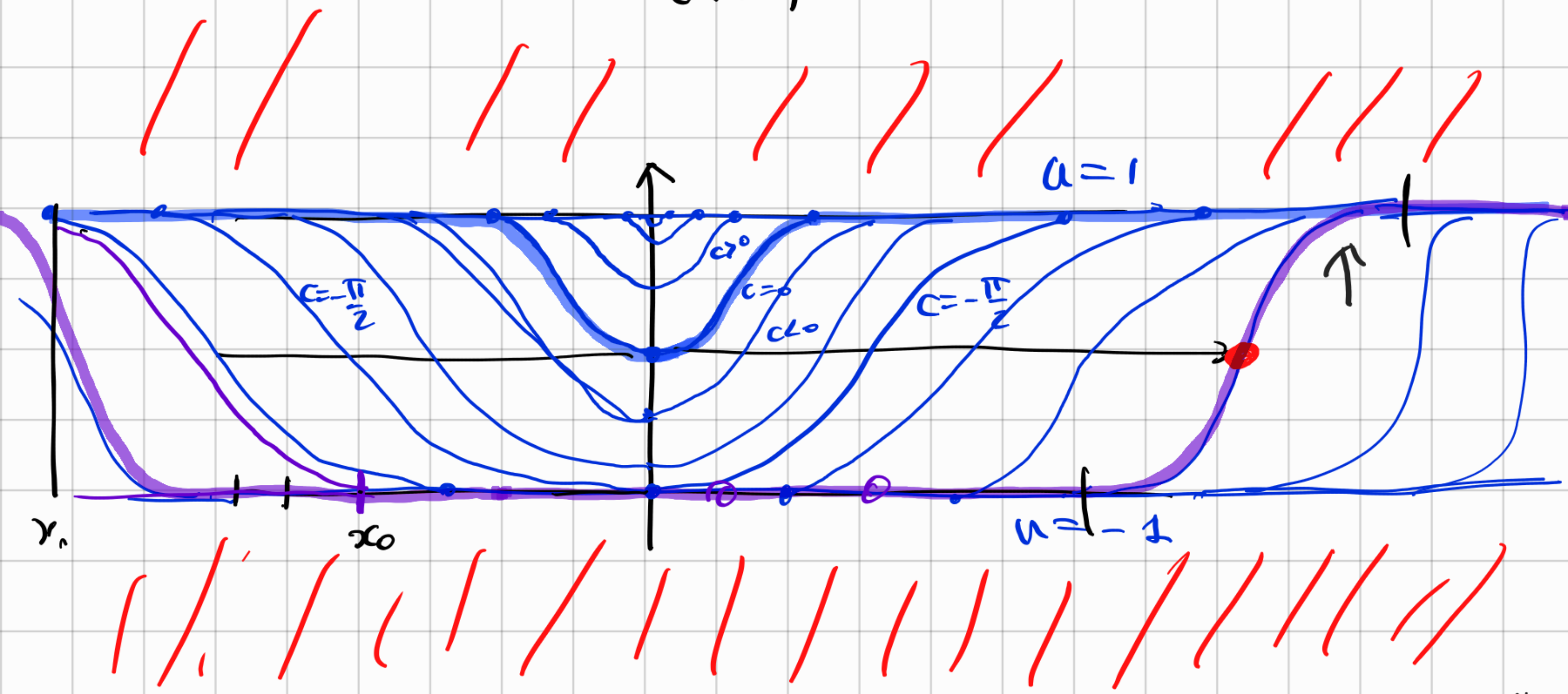
è $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ non sin.



$$\boxed{u(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}$$

con $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x^2}{2}+c \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\pi-2c \le x^2 \le \pi-2c$

$$u(0)=\sin c$$



Tutte le sol. massimali si ottengono "incollando" le soluzioni "analitiche".
Ottengo delle soluzioni "a pezzi" che sono di classe C^1 ma non C^2.

ES $\begin{cases} u'(x)=\sqrt{1-u^2(x)}\cdot x \\ u(\pi)=0 \end{cases}$ $\qquad$ Trovare tutte le sol. massimali.

$\begin{cases} u(x)=\sin\left(\frac{x^2}{2}+c\right) \\ u(\pi)=0 \end{cases}$ in un intorno di $x=\pi$

$\sin\left(\frac{\pi^2}{2}+c\right)=0 \qquad \frac{\pi^2}{2}+c=0$

$c=-\frac{\pi^2}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{x^2}{2}-\frac{\pi^2}{2} \le \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi+\pi^2 \le x^2 \le \pi+\pi^2$$

$$\sqrt{\pi^2-\pi} < x < \sqrt{\pi+\pi^2}$$

$\forall x_0 \in [-\infty, 0]$

$$u(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) & \sqrt{\pi^2-\pi} < x \leq \sqrt{\pi^2+\pi} \\ 1 & x \geq \sqrt{\pi^2+\pi} \\ -1 & x_0 \leq x \leq \sqrt{\pi^2-\pi} \\ \sin\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right) & x_1 \leq x \leq x_0 \\ 1 & x \leq x_1 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{x_0^2}{2} + c_0\right) = -1$$

$$\frac{x_0^2}{2} + c_0 = -\frac{\pi}{2} \qquad c_0 = -\frac{\pi}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x_1^2}{2} + c_0\right) = 1$$

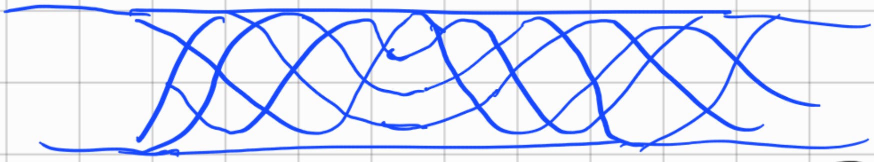
$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1^2 - x_0^2 = 2\pi \qquad x_1 = -\sqrt{2\pi + x_0^2}$$

Se l'equazione fosse stata

$$(u'(x))^2 = (1 - u^2(x)) \cdot x^2$$

avrei avuto anche le soluzioni che "si intrecciano"



TEOREMA di CAUCHY-LIPSCHITZ (ESISTENZA e UNICITA')

<ins>Teorema</ins> (Cauchy-Lipschitz locale) $a \le x_0 \le b$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $R>0$

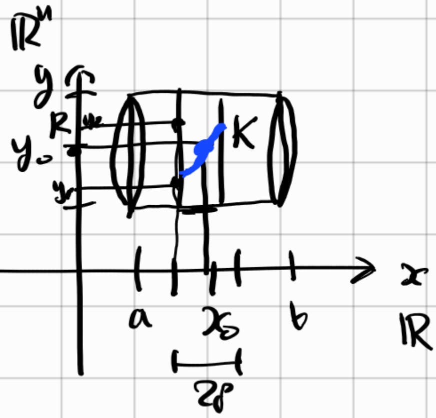
$$K = \{(x,\underline{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : x\in[a,b],\ |\underline{y}-\underline{y}_0| \le R\}$$

$$f: K \to \mathbb{R}^n$$

Ipotesi: (i) f è continua.

(ii) $\exists\, L>0\ \forall x\in[a,b]\ \forall\, \underline{y}_1,\underline{y}_2 \in B_R(\underline{y}_0)$

$$|f(x,\underline{y}_1)-f(x,\underline{y}_2)| \le L\,|\underline{y}_1-\underline{y}_2|$$



Allora $\exists\, \delta>0$ t.c. $\forall\, I$ intervallo $x_0 \in I \subseteq [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [a,b]$

$\exists!\ \underline{u}: I \to \mathbb{R}^n$ che risolve il problema di Cauchy:

$$(*)\quad \begin{cases} \underline{u}'(x) = f(x,\underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

<ins>dim</ins> <ins>Passo 1</ins> formulazione integrale.

$u \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ soddisfa $(*)$ $\Leftrightarrow$ $u \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ soddisfa $(**)$

$$(**)\quad \boxed{\underline{u}(x) = \underline{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \underline{f}(t,\underline{u}(t))\,dt}$$

Infatti se $u \in C^0$ e soddisfa $(**)$
allora $(t,u(t))$ è continua $\Rightarrow f(t,u(t))$ è continua
e $\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt$ è C^1 e (teor. fondamentale del calcolo)

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt = f(x,u(x)).$$

Allora $u(x)$ è C^1 $\quad u'(x) = f(x,u(x))$.

Per $x = x_0$ ottteniamo $u(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} = y_0$. ok!

Viceversa se u soddisfa (*)

$$u(x) - \underset{\overset{\parallel}{y_0}}{u(x_0)} = \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$$

u soddisfa (**).

Passo 2 usare un teorema di punto fisso!

$$u = T(u)$$

$$T(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt.$$

(Voglio usare il teorema delle contrazioni!)

Teorema (Banach-Caccioppoli) X sp. metrico completo, $X \neq \emptyset$, $T : X \to X$ tale che $\exists\, L < 1$
$\forall x, y \in X \quad d(T(x), T(y)) \leq L\, d(x, y)$

Allora $\exists!\, x$ t.c. $T(x) = x$.

$I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$X = C^0(I, \overline{B_R(y_0)}) \circlearrowleft T$$

$$T(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt \qquad \forall x \in I, \ \forall u \in X.$$

Passo 1a $T(u) \overset{?}{\in} X$

A priori: $T(u)(x) \in \mathbb{R}^n$

$$\left|T(u)(x)-y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,u(t))|\,dt\right| \leq$$

Weierstraß. Visto che K è compatto e $|f|$ continua su K $\quad M=\max_K |f| < +\infty$.

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} M\,dt\right| = M|x-x_0| \leq M\cdot\delta \overset{!}{\leq} R \quad x\in I$$

Con queste ipotesi $T: X \to X$ vero se $\boxed{\delta \leq \frac{R}{M}}$

$\left(T(u)(x) \text{ è } C^1 \text{ quindi anche } C^0 \right)$

Passo (2b) $\quad X$ è completo per la distanza uniforme.

$X \subseteq C^0_b(I,\mathbb{R}^n)$ $\leftarrow$ funzioni continue e limitate

b = bounded

X è chiuso $\Rightarrow$ X è completo.

Passo (3b) $\quad T$ è una contrazione? $\qquad c<1$.

devo dimostrare che $\|T(u)-T(v)\|_\infty \leq c\,\|u-v\|_\infty$

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in I} |u(x)|$$

$$\left|T(u)(x)-T(v)(x)\right| = \left|\cancel{y_0}+\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt - \cancel{y_0}-\int_{x_0}^{x} f(t,v(t))\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} \big(f(t,u(t)) - f(t,v(t))\big)\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,u(t))-f(t,v(t))|\,dt\right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot |u(t) - v(t)| \, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \, \|u - v\|_\infty \, dt \right| = L \, |x - x_0| \cdot \|u - v\|_\infty$$

$$= L \cdot \delta \cdot \|u - v\|_\infty$$

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty \leq \underbrace{L \cdot \delta}_{} \, \|u - v\|_\infty$$

se $\delta \leq \frac{1}{L}$ ok!

$$c \doteq L \, \delta < 1 .$$

$\square$