ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 66 - 15.3.2024
(ULTIMA)

MODELLI BIOLOGICI DI CRESCITA
(SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI)

MALTHUS

$u(x)$ = numero di individui al tempo x

$$u'(x) = A \cdot u(x) \qquad A \in \mathbb{R}.$$

La soluzione è $u(x) = u_0 \cdot e^{Ax} = u_0 \left(e^A\right)^x$

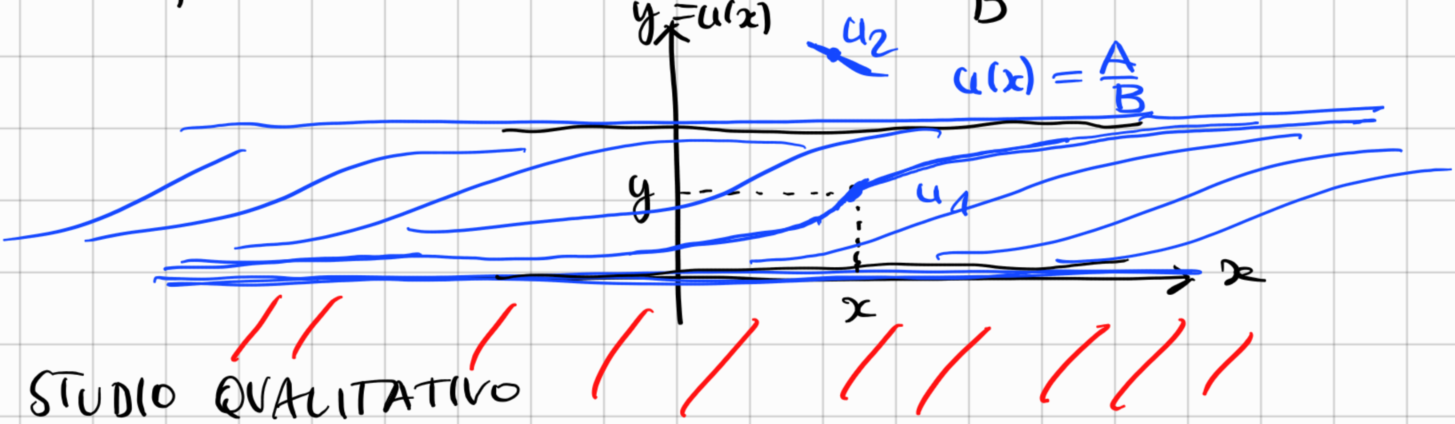
u_0 = popolazione iniziale.

ES Calcolare il tempo di raddoppio.

EQUAZIONE LOGISTICA

$$u'(x) = \underbrace{\big(A - Bu(x)\big)}\,\underbrace{u(x)}$$

$u(x)=0$ è soluzione $\qquad u(x) = \dfrac{A}{B}$ è soluzione



STUDIO QUALITATIVO

u_1 non tocca le soluzioni stazionarie

$\Rightarrow$ è definita globalmente (esce dai rettangoli)

$\Rightarrow$ è strettamente crescente

$\Rightarrow$ ha limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Sia $\ell = \lim_{x \to +\infty} u(x)$.

$$u'(x) = (A - Bu(x)) \cdot u(x) \xrightarrow{\text{per } x \to +\infty} (A - B\ell) \cdot \ell$$

<u>Lemma</u> Se $\lim_{x \to +\infty} u'(x) = m$, e $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$ (finito) allora $m = 0$.

<u>dim</u> $\underbrace{\dfrac{u(x)}{x}}_{\to 0} \overset{\text{Hospital}}{=} \dfrac{u'(x)}{1}$

$u'(x) \to 0$

$u'(x) \to (A - B\ell) \cdot \ell \Rightarrow \begin{cases} \text{o } \ell = 0 \\ \text{o } \ell = \dfrac{A}{B} \end{cases}$

---

u_2 : è strettamente decrescente

per $x \to +\infty$, come prima, $u(x) \to \dfrac{A}{B}$.

Cosa succede per $x \to -\infty$

Idea: $u' = (A - Bu)\,u$

(1) non ci può essere asintoto orizzontale (come prima)

(2) $u \to +\infty$ per $x \to -\infty$

$u \gg 1$ $\qquad (A - Bu)u \sim -Bu^2$

ha un asintoto verticale $2 > 1$

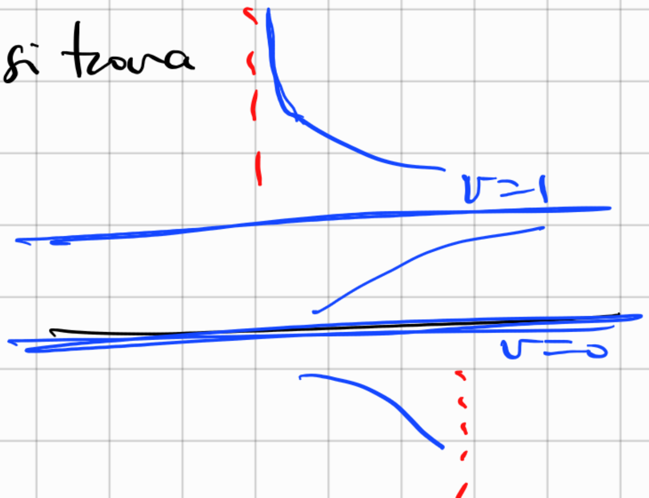
$\Downarrow$ NON BANALE

Se $v' = -Bv^2$ ha asintoto verticale anche $u' = (A - Bu)u$ ha un asintoto verticale.

$$\left[\,(A - Bu)\,u < -\frac{B}{2}u^2\,\right]$$

Risolviamo l'equazione.

Posto $v(x) = \frac{B}{A}\cdot u\left(\frac{x}{A}\right)$ si trova



......

$$v' = (1 - v)\cdot v$$
$(A = B = 1)$

Risolvendo:

$$\frac{v'}{(1-v)v} = 1$$

$$\int \frac{dv}{(1-v)v} = x - x_0$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-v)v} = \frac{1}{v} + \frac{1}{1-v}}$$

$$\ln|v| - \ln|1-v| = x - x_0$$

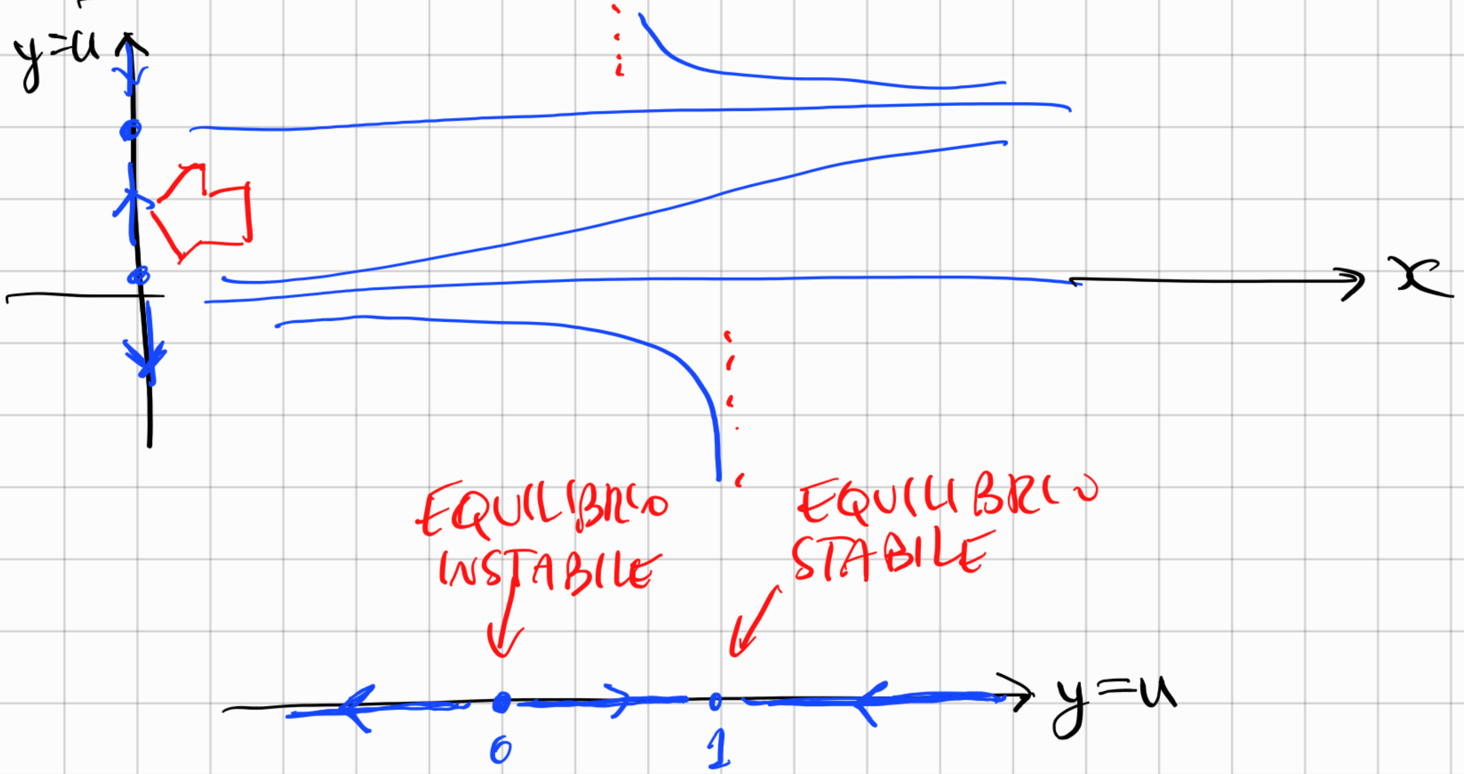
$$\ln\left|\frac{v}{1-v}\right| = x - x_0$$

$$\frac{v}{1-v} = \pm e^{x-x_0}$$

$$v = \pm e^{x-x_0}(1-v)$$

$$v\left(1 \pm e^{x-x_0}\right) = \pm e^{x-x_0}$$

$$v = \frac{\pm e^{x-x_0}}{1 \pm e^{x-x_0}} = 1 - \frac{1}{1 \pm e^{x-x_0}}$$



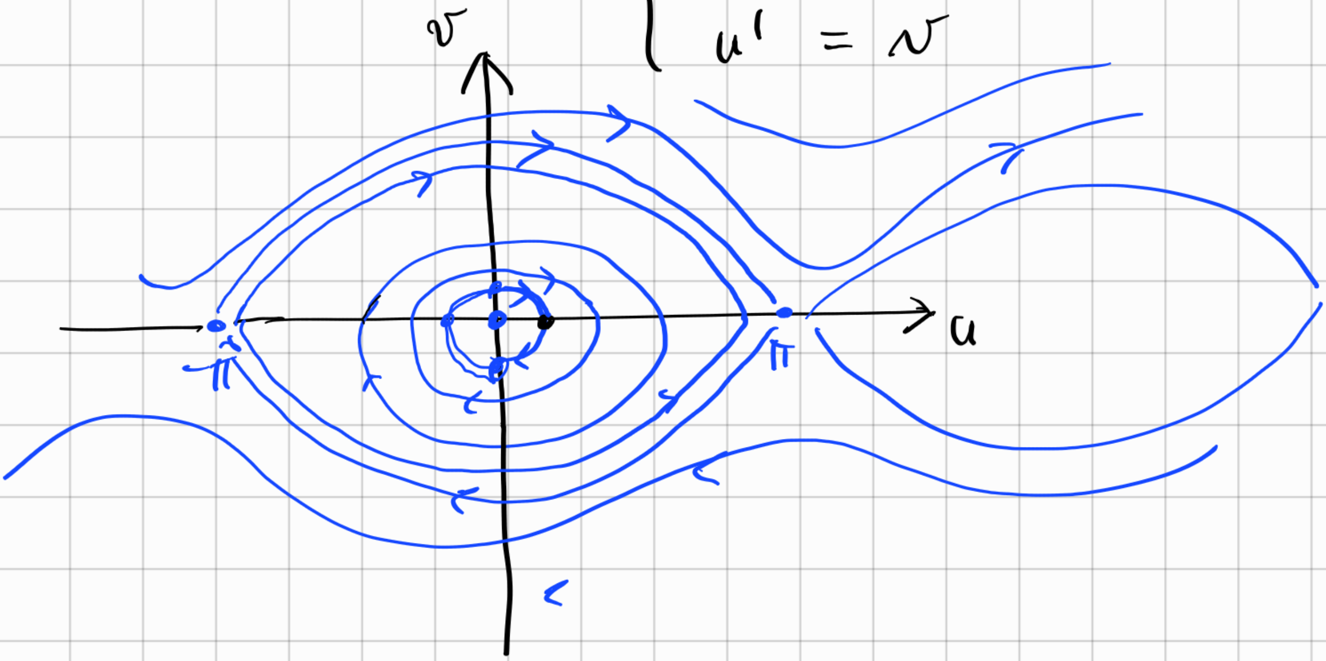
Le equazioni del II ordine si riconducono ad un sistema del primo ordine.

Es Pendolo

$$u'' = -\sin u$$

$$v = u'$$
$$u'' = v'$$

$$\begin{cases} v' = -\sin u \\ u' = v \end{cases}$$



Il modello di Volterra-Lotka

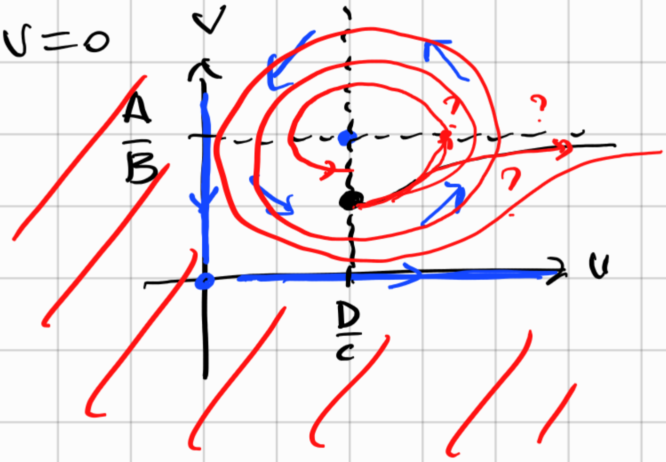
$u(x)$ = numero di prede
$v(x)$ = numero di predatori

$$\begin{cases} u' = Au - Buv = (A - Bv)u \\ v' = Cuv - Dv = (Cu - D)v \end{cases}$$

crescita naturale
pesci mangiati
pesci mangiati
decrescita naturale

Soluzioni stazionarie

$u=0 \quad v=0$



$u=0 \qquad v(x) = v_0 \cdot e^{-Dx}$

$v=0 \qquad u(x) = u_0 \, e^{Ax}$

$$\begin{cases} v = \frac{A}{B} \\ u = \frac{D}{C} \end{cases}$$

è soluzione

Studio qualitativamente le altre soluzioni:

$u' > 0$ se $v < \frac{A}{B}$

$v' > 0$ se $u > \frac{D}{C}$

Integrale del sistema

$$\begin{cases} u' = u \cdot (A - Bv) \\ v' = v(Cu - D) \end{cases}$$

$$\frac{v'}{u'} = \frac{v\,(Cu-D)}{u\,(A-Bv)}$$

$$\frac{v'}{v}(A-Bv) = \frac{u'}{u}(Cu-D) \qquad \begin{cases} u = u(x) \\ du = u'(x)\,dx \end{cases}$$

$$\int \frac{A-Bv}{v}\,dv = \int \frac{Cu-D}{u}\,du \qquad \begin{cases} v = v(x) \\ dv = v'(x)\,dx \end{cases}$$

$$= \int \left(\frac{A}{v} - B\right) dv = \underline{A\ln v - Bv}$$

$$\int \left(C - \frac{D}{u}\right) du = \underline{Cu - D\ln u}$$

$$A\ln v - Bv = Cu - D\ln u - k$$

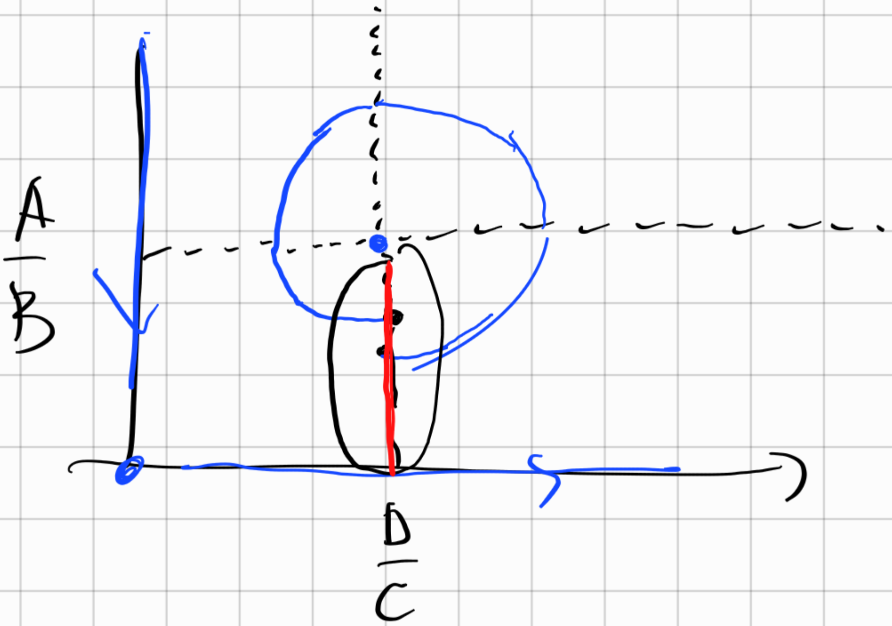
Posto $H(u,v) = Cu + Bv - D\ln u - A\ln v$

$$H(u(x), v(x)) = k$$

$(u(x), v(x))$ è limitata $\qquad A, B, C, D > 0$

perché se $u(x) \to +\infty$ o $v(x) \to +\infty$

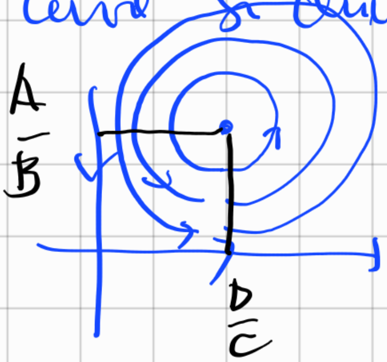
allora $H(u(x), v(x)) \to +\infty$



Si verifica

$H\left(\frac{D}{C}, t\right)$ è strettamente monotona per $t \in \left[0, \frac{A}{B}\right]$

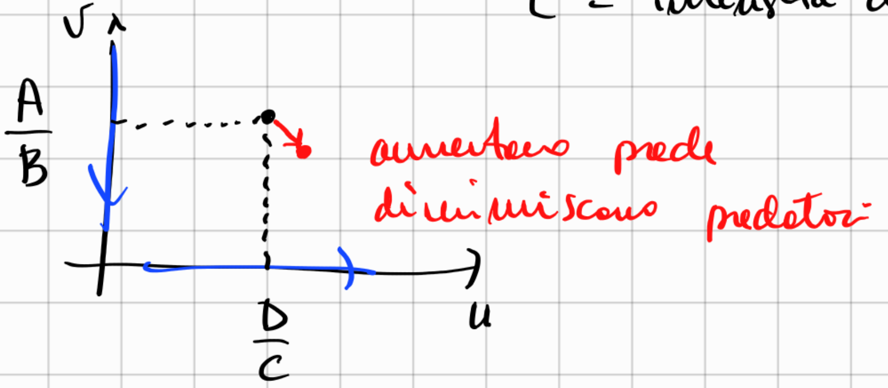
La curva si chiude!



Cosa succede con la pesca intensiva?

$$\begin{cases} u' = Au - Buv - Eu = (A-E)u - Buv \\ v' = Cuv - Dv - Ev = Cuv - (D+E)v \end{cases}$$

E = intensità della pesca.



$$F = ma$$

$$F(u) = u''$$ moltiplico per u'

$$F(u)\cdot u' = u'' u' = \left(\frac{1}{2}(u')^2\right)'$$

$$\| \qquad (V(u))'$$

$$E = \frac{1}{2}v^2$$

$$V = -\int F \qquad E + V = \text{const}$$