Successioni ricorsive

Emanuele Paolini

Analisi Matematica I, 2015–2016

Queste note sono obsolete: guarda il capitolo 8 degli appunti di Analisi Uno: https://paolini.github.io/AnalisiUno/

In queste note prenderemo in considerazione le successioni a_n definite *per ricorrenza* o *ricorsivamente* dalle condizioni:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \tag{1}$$

Fissato il termine iniziale α e la legge di ricorrenza f, c'è una unica successione che soddisfa (1) e i suoi termini sono:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha, \\ a_2 &= f(a_1) = f(\alpha), \\ a_3 &= f(a_2) = f(f(\alpha)), \\ a_4 &= f(a_3) = f(f(f(\alpha))), \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ viene chiamata una *equazione autonoma del primo ordine*. Osserviamo infatti che ci sono altre tipologie di equazioni che però non considereremo in queste note. Ad esempio quando vogliamo definire il fattoriale: $a_n = n!$ diamo le condizioni:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \end{cases}$$

ma l'equazione $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ è della forma $a_{n+1} = f(n, a_n)$ e si dice essere *non autonoma* perché la funzione di ricorrenza f dipende esplicitamente da n oltre che dal termine precedente a_n.

Si potrebbero anche considerare equazioni di ordine maggiore del primo. Ad esempio la successione di Fibonacci F_n è definita da

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

che è una relazione del secondo ordine in quanto ogni termine può essere definito utilizzando i valori dei *due* termini precedenti.

Esercizio 1 (algoritmo di Erone). Fissato un numero reale $p > 1$ consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 = p \\ a_{n+1} = \frac{a_n + p/a_n}{2}. \end{cases}$$

Si dimostri che $a_n \to \sqrt{p}$.

Osserviamo, ad esempio, che per $p = 2$ i primi termini della successione sono:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2, \\
a_2 &= \frac{2 + 2/2}{2} = 3/2 = 1.5, \\
a_3 &= \frac{3/2 + 2/(3/2)}{2} = 17/12 \sim 1.4166666, \\
a_4 &= \frac{17/12 + 2/(17/12)}{2} = 577/408 \sim 1.4142156, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

che effettivamente *sembrano* avvicinarsi molto al numero

$$\sqrt{2} \sim 1.4142135.$$

Dimostrazione. Passo 1. Dimostriamo per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti per $n = 1$ osserviamo che $a_1 = p > 0$ mentre se supponiamo che $a_n > 0$ otteniamo che $a_{n+1} = (a_n + p/a_n)/2$ è positivo in quanto è la metà della somma di due quantità positive. Quindi, applicando il principio di induzione, possiamo concludere che $a_n > 0$ per ogni n.

Abbiamo in effetti identificato un insieme $A = \{x \colon x > 0\} = (0, +\infty)$ tale che la funzione $f(x) = \frac{x+p/x}{2}$ è definita su A e, contemporaneamente, ha valori in A. Quindi questo passaggio è fondamentale anche solo per garantire che la successione a_n sia ben definita.

Passo 2. Dimostriamo che la successione a_n è decrescente. Per fare questo osserviamo che essere decrescente significa: $a_{n+1} \leq a_n$ e cioé

$$\frac{a_n + p/a_n}{2} \leq a_n$$

ovvero (moltiplicando ambo i lati per $a_n > 0$)

$$a_n^2 + p \leq 2a_n^2$$

che è equivalente a $a_n^2 - p \geq 0$. E, in effetti, questa disuguaglianza è sempre vera in quanto per $n = 1$ si riduce a $a_1 - p = p^2 - p \geq 0$ che è soddisfatta nel caso $p > 1$. Mentre

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 - p = \left(\frac{a_n + p/a_n}{2}\right)^2 - p &= \frac{a_n^4 + 2pa_n^2 + p^2 - 4pa_n^2}{4a_n^2} \\
= \frac{a_n^4 - 2pa_n^2 + p^2}{4a_n^2} &= \frac{\left(a_n^2 - p\right)^2}{4a_n^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Dunque $a_{n+1}^2 \geq p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e di conseguenza a_n è decrescente e inoltre $a_n > \sqrt{p}$.

Passo 3. Visto che a_n è una successione decrescente per il teorema sulle successioni monotòne possiamo affermare che a_n ammette limite, e cioé: $a_n \to \ell$ con $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Possiamo immediatamente escludere $\ell = +\infty$ in quanto la successione è decrescente, e possiamo anche escludere $\ell < \sqrt{p}$ in quanto sappiamo che $a_n > \sqrt{p}$ e quindi (per il teorema della permanenza del segno) $\ell \geq \sqrt{p}$. Inoltre

$$a_{n+1} = \frac{a_n + p/a_n}{2} \to \frac{\ell + p/\ell}{2}.$$

Ma sappiamo che se $a_n \to \ell$ anche $a_{n+1} \to \ell$ (visto che a_{n+1} è una sottosuccessione di a_n) e quindi (per l'unicità del limite)

$$\ell = \frac{\ell + p/\ell}{2} \tag{2}$$

da cui si ricava $\ell^2 = p$ ovvero (essendo $\ell \geq 0$) concludiamo $a_n \to \ell = \sqrt{p}$. □

Cominciamo ora a definire una terminologia e a fissare alcuni risultati generali che ci serviranno per trovare alcune proprietà delle successioni definite da (1).

Definizione 1 (punto fisso)**.** *Diremo che x è un* punto fisso *per la funzione f se vale* *punto fisso*

$$f(x) = x.$$

Osserviamo che se α è un punto fisso per f la successione costante $a_n = \alpha$ soddisfa l'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$. Inoltre se $a_{n+1} = f(a_n)$, se a_n converge ad un limite ℓ e se $\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$ (diremo: f è continua in ℓ) allora

$$a_{n+1} = f(a_n) \to f(\ell)$$

ma visto che a_{n+1} ha lo stesso limite di a_n si trova che $f(\ell) = \ell$ ovvero il limite della successione è un punto fisso.

Nell'esercizio precedente la funzione $f(x) = (x + p/x)/2$ ha come punti fissi $\sqrt{p}$ e $-\sqrt{p}$ e l'equazione (2) non è altro che $f(x) = x$. E in effetti abbiamo mostrato che la successione a_n converge proprio ad un punto fisso.

Definizione 2 (insieme invariante)**.** *Un insieme A si dice essere* invariante *per f se $f(A) \subseteq A$.* *insieme invariante*

Osserviamo che se A è un insieme invariante e $a_1 \in A$ allora la successione definita da $a_{n+1} = f(a_n)$ assume sempre valori in A.

Nell'esercizio 1 abbiamo dimostrato che gli insiemi $(0, +\infty)$ e $(\sqrt{p}, +\infty)$ sono invarianti.

Teorema 1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme invariante per f e sia a_n una successione con $a_1 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$.*

Se per ogni $x \in A$ vale $f(x) \geq x$ allora la successione a_n è crescente. *$f(x) \geq x$*

Se per ogni $x \in A$ vale $f(x) \leq x$ allora la successione a_n è decrescente. *$f(x) \leq x$*

Dimostrazione. In effetti se $f(x) \geq x$ si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$$

e quindi la successione a_n è crescente. Mentre se $f(x) \leq x$ si ha

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$$

e la successione è decrescente. □

Teorema 2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme invariante per f e sia a_n una successione con $a_1 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$. Se f è crescente su A allora a_n è monotòna.* *f crescente*

Dimostrazione. Osserviamo che se f è crescente allora

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) \geq f(a_n) \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$$
$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) \leq f(a_n) \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Dunque se per i primi due termini si ha $a_2 \geq a_1$ allora, per induzione, si ha $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n e quindi la successione è crescente. Se invece $a_2 \leq a_1$ si dimostra per induzione che $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n e quindi la successione è decrescente. □

Teorema 3. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme invariante per f e sia a_n una successione con $a_1 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$. Se f è decrescente su A allora le due successioni a_{2n} (termini di indice pari) e a_{2n+1} (termini di indice dispari) sono monotòne.*

f decrescente

Dimostrazione. Osserviamo che

$$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = f(f(a_{2n})) = (f \circ f)(a_{2n})$$
$$a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) = f(f(a_{2n+1})) = (f \circ f)(a_{2n})$$

cioé le sottosuccessioni dei termini di indice pari e di indice dispari soddisfano una relazione di ricorrenza tramite la funzione $f \circ f$ (invece che f).

Osserviamo anche che se f è decrescente allora $f \circ f$ è crescente. Infatti:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f(f(x)) \leq f(f(y)).$$

Dunque possiamo applicare il teorema precedente e ottenere che le due sottosuccessioni sono entrambe monotòne. □

Utilizziamo la terminologia e i risultati precedenti nei seguenti esercizi.

Esercizio 2 (Fibonacci). Si consideri il rapporto $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ di due termini successivi della successione di Fibonacci: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Determinare il limite di a_n.

Soluzione. La successione a_n soddisfa la relazione:

$$a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Inoltre $a_1 = F_2/F_1 = 1$. Dunque la successione a_n soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}. \end{cases}$$

Osserviamo che l'intervallo $A = (0, +\infty)$ è invariante per la funzione $f(x) = 1 + 1/x$. Infatti se $x \in A$ allora $x > 0$ ma anche $f(x) = 1 + 1/x$ lo è. Su tale intervallo, inoltre, la funzione f è decrescente. Infatti

$$0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Visto che $a_1 = 1 \in A$, A invariante, f decrescente su A, il Teorema 3 ci dice che le due successioni a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone e quindi ammettono limite: $a_{2n} \to \ell$, $a_{2n+1} \to \ell'$ con $\ell, \ell' \in [0, +\infty]$.

Se ℓ è finito si ha:

$$a_{2n+1} = f(a_{2n}) = 1 + \frac{1}{a_{2n}} \to 1 + \frac{1}{\ell}$$

e quindi dato che $a_{2n+1} \to \ell'$ si ha $\ell' = 1 + 1/\ell$. Inoltre

$$\begin{aligned} a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) &= 1 + \frac{1}{a_{2n+1}} \to 1 + \frac{1}{\ell'} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\ell}} \\ &= 1 + \frac{\ell}{\ell+1} = \frac{2\ell+1}{\ell+1} \end{aligned}$$

da cui, visto che $a_{2n+2} \to \ell$,

$$\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1}.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\ell + 1$ si ottiene

$$\ell^2 + \ell = 2\ell + 1$$

ovvero $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ da cui, utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, e ricordando che $\ell \geq 0$, si trova:

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ma anche

$$\begin{aligned} \ell' = 1 + \frac{1}{\ell} &= \frac{\ell+1}{\ell} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{3-2\sqrt{5}-5}{-4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \ell. \end{aligned}$$

Dunque entrambe le sottosuccessioni dei termini di indice pari e di indice dispari convergono allo stesso valore ℓ e quindi l'intera successione ci converge: $a_n \to (1+\sqrt{5})/2$.

Il caso $\ell = +\infty$ si può escludere in quanto ripetendo il ragionamento fatto sopra si otterrebbe $\ell' = 1$ da cui: $\ell = 1 + 1/\ell' = 2$ che è una contraddizione. □

Un metodo grafico per visualizzare l'andamento dei termini della successione definita da (1) è il *diagramma a ragnatela*. Si disegna la curva $y = f(x)$ su un piano cartesiano. Partendo dal punto di coordinate $(\alpha, 0) = (a_1, 0)$ si procede lungo una retta verticale fino a raggiungere il grafico della funzione nel punto $(a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$. Dopodiché si procede in orizzontale fino ad incontrare la retta $y = x$ nel punto (a_2, a_2) e si ripete il procedimento in modo che le coordinate x (ma anche le y) dei vertici della spezzata mi danno la successione $a_1, a_2, a_3, \dots$. Ad esempio il diagramma a ragnatela corrispondente all'Esercizio 2 è rappresentato in Figura 1.

Esercizio 3. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 1 + a_n^2. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione.

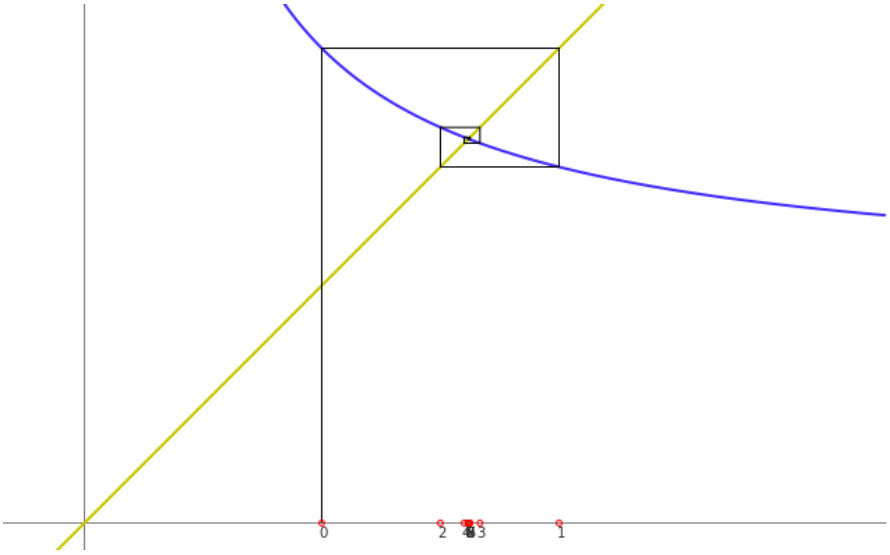

Figura 1: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 2 (click me).

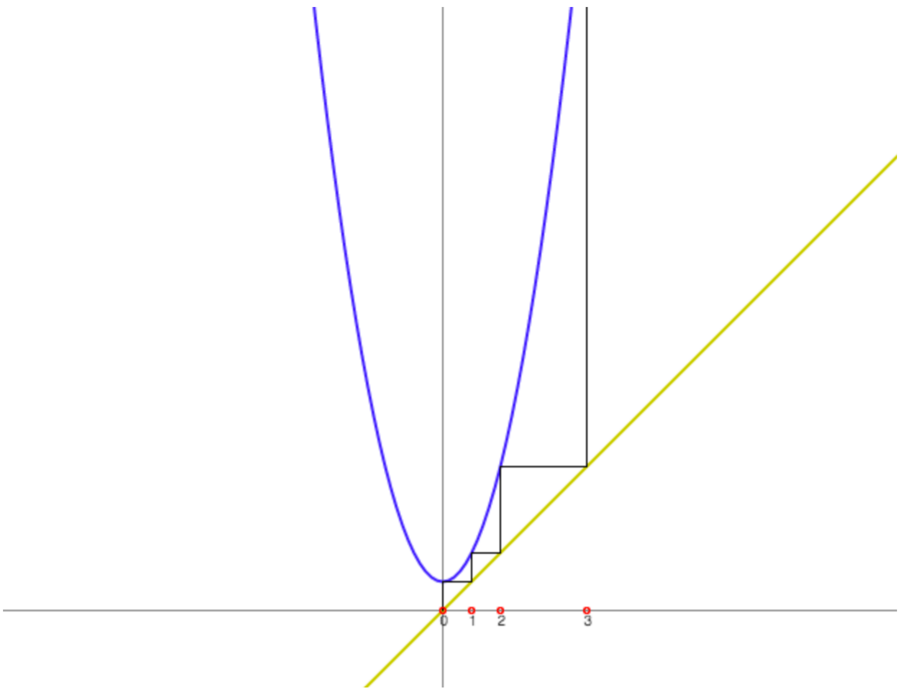

Figura 2: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 3 (click me)

.

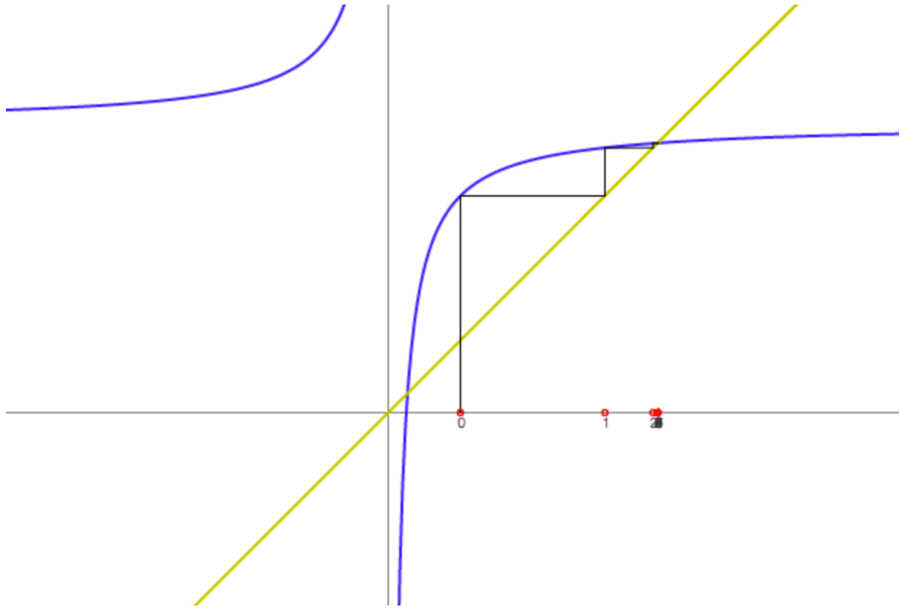

Figura 3: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 4 (click me)

.

Soluzione. L'equazione ricorsiva è $a_{n+1} = f(a_n)$ se poniamo $f(x) = 1 + x^2$. E' facile verificare che per ogni x si ha $f(x) > x$ e quindi, per il Teorema 1 otteniamo che la successione a_n è crescente. Dunque ammette limite: $a_n \to \ell$. Se il limite fosse finito si avrebbe

$$a_{n+1} = 1 + a_n^2 \to 1 + \ell$$

e quindi, visto che $a_{n+1} \to \ell$, si avrebbe $\ell = 1 + \ell^2$ (cioè ℓ dovrebbe essere un punto fisso di f). Questa equazione abbiamo già osservato che non ha soluzioni ($x^2 + 1 > x$) e quindi ℓ non è finito. Visto che la successione a_n è crescente possiamo escludere che sia $\ell = -\infty$ e quindi l'unica possibilità che rimane è che $a_n \to +\infty$. $\square$

Esercizio 4. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione.

Soluzione. Si mostra che sull'intervallo $A = (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ vale $f(x) > x$, che gli estremi di A sono punti fissi e inoltre che la funzione f è crescente (lo è su tutto $(0, +\infty)$). Di conseguenza è facile verificare che A è invariante, in quanto si ha

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3} &\Rightarrow f(2 - \sqrt{3}) < f(x) < f(2 + \sqrt{3}) \\ &\Rightarrow 2 - \sqrt{3} < f(x) < 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Inoltre se $a_1 \in A$ allora per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n \in A$ ed essendo $f(x) > x$ la successione sarà crescente. Dunque ammette limite: $a_n \to \ell \in \bar{A}$, $\ell \geq a_1$. Ma allora

$$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \to 4 - \frac{1}{\ell} = f(\ell)$$

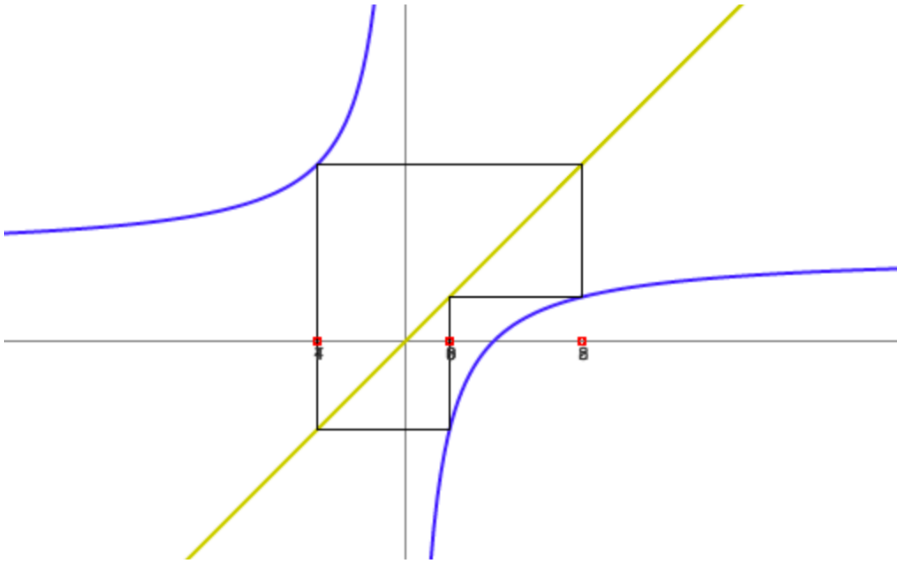

Figura 4: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 5 (click me).

e visto che a_{n+1} ha lo stesso limite di a_n si ha $\ell = f(\ell)$ le cui uniche soluzioni sono $2 \pm \sqrt{3}$. Ma $2 - \sqrt{3}$ va scartata in quanto $\ell \geq a_1 > 2 - \sqrt{3}$ e quindi rimane $a_n \to \ell = 2 + \sqrt{3}$. $\square$

Esercizio 5. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

Determinare, se esiste, il limite della successione.

Soluzione. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= 1 - \frac{1}{1/2} = -1 \\ a_3 &= 1 - \frac{1}{-1} = 2 \\ a_4 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_1 \end{aligned}$$

Essendo $a_4 = a_1$ la successione si ripete e, (per induzione) si dimostra che $a_{3n+k} = a_k$. Dunque si ha

$$\begin{aligned} a_{3n} &= a_3 = 2 \to 2 \\ a_{3n+1} &= a_1 = 1/2 \to 1/2 \\ a_{3n+2} &= a_2 = -1 \to -1 \end{aligned}$$

e la successione a_n non ammette limite. $\square$

Esercizio 6. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{5 - a_n^2}{4}. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione.

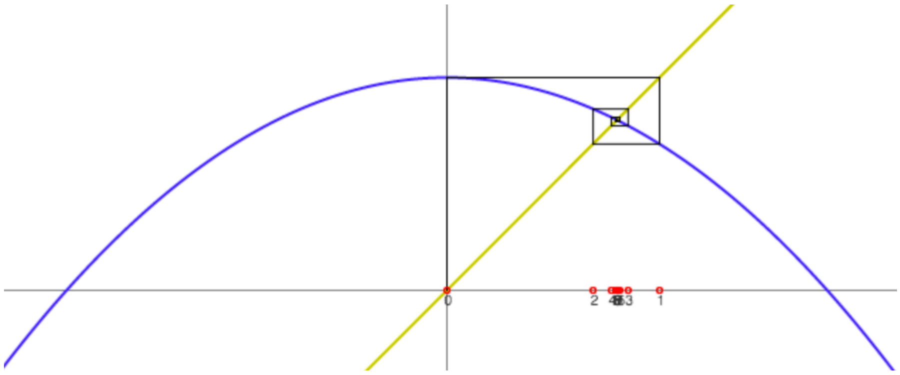

Figura 5: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 6 (click me).

Soluzione. Si ha $a_{n+1} = f(a_n)$ se scegliamo $f(x) = (5 - x^2)/4$. Osserviamo che la funzione f è decrescente per $x \geq 0$ (infatti $0 \leq x_1 < x_2$ implica $x_1^2 < x_2^2$ da cui $-x_1^2 > -x_2^2$ e quindi $f(x_1) > f(x_2)$). Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= f(a_1) = 5/4. \\ a_3 &= f(5/4) = \frac{5 - 25/16}{4} = \frac{55}{64} \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che l'intervallo $A = [0, 5/4]$ è invariante. Visto che f è decrescente su tale intervallo, si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{5}{4} &\Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(5/4) \\ &\Rightarrow \frac{5}{4} \geq f(x) \geq \frac{55}{64} \geq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

cioè $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$, che è quanto volevamo dimostrare.

Per il Teorema 3 sappiamo dunque che $a_{2n} \to \ell$ e $a_{2n+1} \to \ell'$. Entrambi i limiti sono finiti in quanto essendo $a_n \in A$ per ogni n, si ha $\ell, \ell' \in \bar{A} = A$. Dunque, come al solito, osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= f(a_n) \to f(\ell) \\ a_{2n+2} &= f(a_{n+1}) \to f(\ell') \end{aligned}$$

ma sapendo che $a_{2n+1} \to \ell'$ e $a_{2n+2} \to \ell$ otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ell' = f(\ell) \\ \ell = f(\ell') \end{cases}$$

da cui si ottiene $f(f(\ell)) = \ell$ e $f(f(\ell')) = \ell'$. Dunque vogliamo scrivere e risolvere l'equazione $f(f(x)) = x$:

$$\frac{5 - \left(\frac{5-x^2}{4}\right)^2}{4} = x$$

cioè

$$5 - \frac{25 - 10x^2 + x^4}{16} = 4x$$

ovvero
$$x^4 - 10x^2 + 64x - 55 = 0.$$

Come facciamo a risolvere una equazione di quarto grado? In questo frangente dobbiamo fare una osservazione di carattere generale che ci sarà di grande aiuto. Osserviamo che se x è una soluzione di $f(x) = x$ allora x è anche soluzione di $f(f(x)) = x$ in quanto in tal caso si ha $f(f(x)) = f(x) = x$. Ma l'equazione $f(x) = x$ è una equazione di secondo grado, che quindi possiamo facilmente risolvere:

$$\begin{gathered}\frac{5-x^2}{4} = x\\ x^2 + 4x - 5 = 0\\ x_{12} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3.\end{gathered}$$

Dunque abbiamo trovato due zeri del polinomio di quarto grado e quindi tale polinomio deve essere divisibile per

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5).$$

Eseguiamo la divisione tra polinomi:

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 10x^2 + 64x - 55}{x^2+4x-5} &= x^2 + \frac{x^4 - 10x^2 + 64x - 55 - x^2(x^2+4x-5)}{x^2+4x-5}\\ &= x^2 + \frac{-4x^3 - 5x^2 + 64x - 55}{x^2+4x-5}\\ &= x^2 - 4x + \frac{-4x^3 - 5x^2 - 64x - 55 + 4x(x^2+4x-5)}{x^2+4x-5}\\ &= x^2 - 4x + \frac{11x^2 + 44x - 55}{x^2+4x-5}\\ &= x^2 - 4x + 11.\end{aligned}$$

Come previsto la divisione non ha resto. Possiamo quindi completare la scomposizione cercando gli zeri del polinomio $x^2 - 4x + 11$ che però, da un rapido controllo, non ha soluzioni reali.

Dunque in questo caso i punti fissi di f coincidono con i punti fissi di $f \circ f$ e dunque i due limiti ℓ, ℓ' devono essere elementi dell'insieme dei punti fissi: $\{1, -5\}$. D'altra parte -5 deve essere escluso in quanto i limiti stanno entrambi nella chiusura dell'insieme invariante, che non comprende numeri negativi.

Concludiamo quindi che $\ell = \ell' = 1$ e dunque l'intera successione ha limite: $a_n \to 1$. □

Esercizio 7. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = 2 - a_n^2. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione nei casi: $\alpha = -7$, $\alpha = 4$ e $\alpha = 1/42$.

Soluzione. Abbiamo $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) = 2 - x^2$. Determiniamo i punti fissi di f:

$$2 - x^2 = x, \qquad x^2 + x - 2 = 0$$

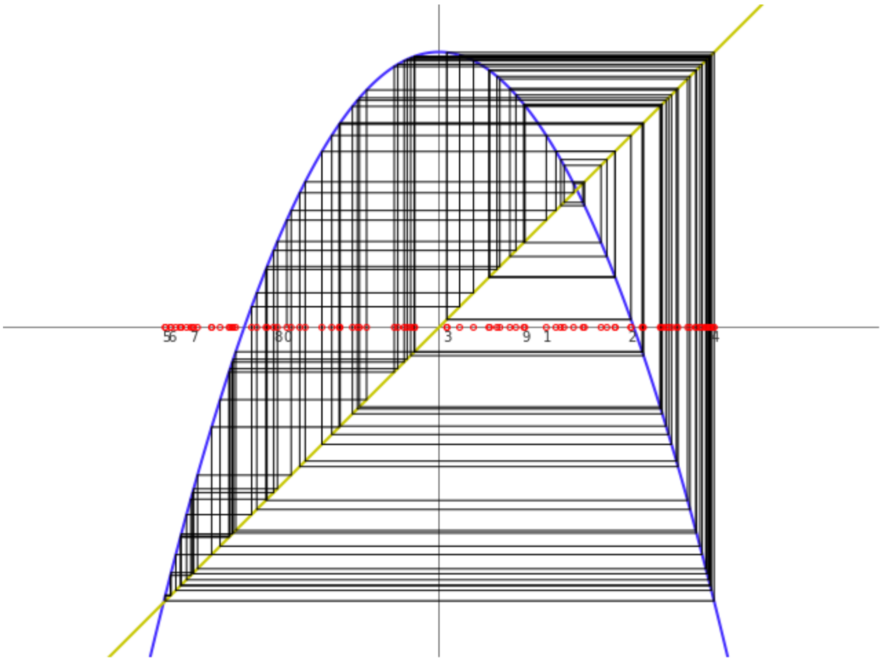

Figura 6: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 7 (click me).

che ha come soluzioni $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ cioé $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Tenendo conto anche dei segni si può osservare che all'interno delle due soluzioni si ha $f(x) > x$ mentre all'esterno si ha $f(x) < x$.

Osserviamo inoltre che $f(x)$ è crescente per $x \leq 0$ e decrescente per $x \geq 0$.

Caso $\alpha = -7$. In questo caso consideriamo l'intervallo $A = (-\infty, -2)$. Visto che f è crescente su questo intervallo, e visto che -2 è un punto fisso si ha:

$$x < -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < -2$$

che significa che A è un intervallo invariante.

Su questo intervallo si ha $f(x) < x$ e quindi a_n è decrescente e di conseguenza ammette limite $a_n \to \ell$. Il limite può essere finito oppure $-\infty$. Ma se fosse finito allora avremmo

$$a_{n+1} = 2 - a_n^2 \to 2 - \ell^2$$

e siccome $a_{n+1} \to \ell$ avremmo $\ell = 2 - \ell^2$ cioè ℓ è un punto fisso di f. Ma visto che $\ell \leq a_1 = \alpha < x_1 < x_2$ otteniamo un assurdo.

Dunque l'unica possibilità è che $a_n \to -\infty$. Questo stesso ragionamento vale per ogni $\alpha < -2$.

Caso $\alpha = 4$. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha = 4 \\ a_2 &= f(a_1) = 2 - 4^2 = -14. \end{aligned}$$

quindi $a_2 \in A$ (l'intervallo invariante del punto precedente) e dall'indice 2 in poi ci si riconduce quindi ai risultati precedenti. Dunque anche in questo caso $a_n \to -\infty$.

Caso $\alpha = 1/42$. Questo caso è decisamente più complesso dei precedenti. Prendiamo l'insieme $A_2 = [-2, 2]$, vogliamo dimostrare che è un insieme invariante. Nell'intervallo $[-2, 0]$ la funzione è crescente e quindi ha minimo in -2 dove vale $f(-2) = -2$ ed ha massimo in 0 dove assume il valore $f(0) = 2$. Nell'intervallo $[0, 2]$ la funzione è decrescente e, di nuovo, ha massimo $f(0) = 2$ e minimo $f(2) = -2$. Dunque per ogni $x \in [-2, 2]$ si ha $f(x) \in [-2, 2]$ cioè, come volevamo dimostrare, A_2 è invariante.

Dunque visto che $a_1 = \alpha \in A_2$ scopriamo che per ogni n si ha $a_n \in [-2, 2]$. Supponiamo ora che la successione abbia limite: $a_n \to \ell$. In tal caso, passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ otteniamo, come al solito, che il limite dovrebbe essere un punto fisso di f: o $\ell = -2$ o $\ell = 1$. Cercheremo ora di dimostrare che questo è assurdo. Ci sono due possibilità che dobbiamo escludere. La prima è che la successione tenda al punto fisso ℓ senza mai uguagliarlo. La seconda è che per un certo n_0 si abbia $a_n = \ell$ per $n = n_0$ e quindi per ogni $n \geq n_0$.

Supponiamo di essere nel primo caso e supponiamo che $\ell = -2$. In tal caso, per il teorema della permanenza del segno la successione deve, da un certo indice in poi, stare nell'intervallo $[-2, 0]$. Ma in tale intervallo si ha $f(x) > x$ e quindi la successione sarebbe, da un certo indice in poi, crescente. Ma visto che $a_n \geq -2$ per ogni n non è possibile che la successione converga, decrescendo, a -2.

Supponiamo allora di essere nel primo caso (la successione è sempre diversa dai due punti fissi) e supponiamo che $\ell = 1$. Anche in questo caso da un certo indice in poi la successione deve stare nell'intervallo $[0, 2]$ (altrimenti non potrebbe convergere a 1. Ma in tale intervallo la funzione f è decrescente e quindi le sottosuccessioni dei termini pari e dei termini dispari sono entrambe monotone. Da uno studio più approfondito della funzione composta $f \circ f$ si può osservare però che $f(f(x)) > x$ per $x \in [1, (1 + \sqrt{5})/2]$ mentre $f(f(x)) < x$ per $x \in [0, 1]$. Ma allora i termini che si trovano a destra del punto fisso si allontanano da esso (perché $a_{n+2} > a_n$) e anche quelli che si trovano a sinistra si allontanano (perché $a_{n+2} < a_n$) e quindi non è possibile che la successione stia convergendo a $\ell = 1$.

Nota. Facciamo una osservazione generale che potrà essere ripresa solamente quando avremo a disposizione le derivate. Osserviamo che si può facilmente determinare la *stabilità* o *instabilità* di un punto fisso guardando la pendenza del grafico in quel punto. Se la pendenza è in valore assoluto minore di 1 allora il punto fisso sarà stabile (o attrattivo) cioè partendo da un punto sufficientemente vicino si convergerà necessariamente al punto fisso. Se invece la pendenza è in valore assoluto maggiore di 1 il punto fisso sarà instabile (o repulsivo). Cioè, a parte la successione costante che assume il valore esatto del punto fisso, non è possibile che una successione converga al punto fisso.

Rimane da considerare la possibilità che la successione assuma da un certo punto in poi il valore esatto di un punto fisso. Supponiamo ad esempio che per un certo n si abbia $a_n = 1$. Allora si deve avere

$$1 = a_n = 2 - (a_{n-1})^2$$

da cui

$$a_{n-1} = \pm 1.$$

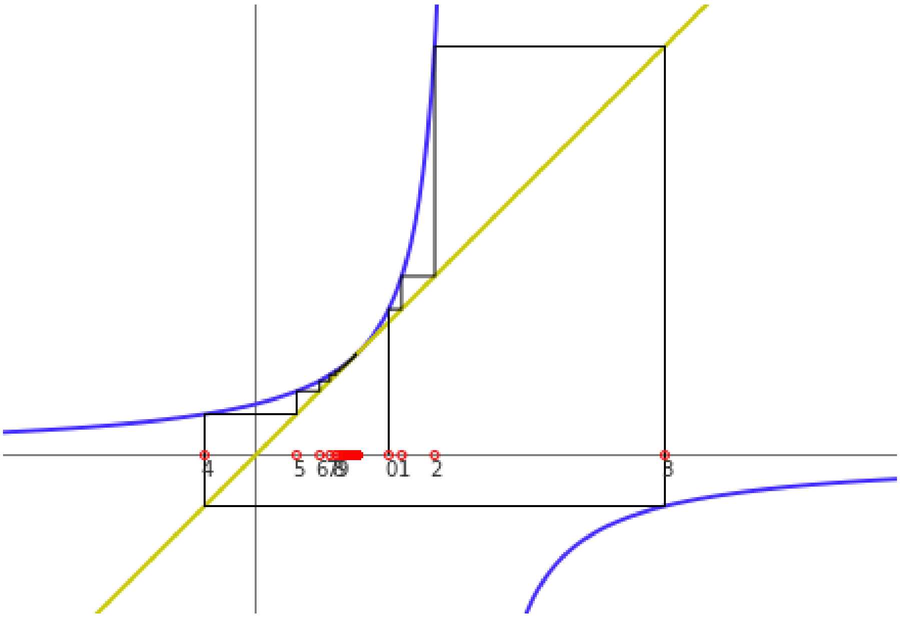

Figura 7: Diagramma a ragnatela relativo all'Esercizio 8 (click me).

Se a_n era il primo termine con valore 1 dovrà necessariamente essere $a_{n-1} = -1$. Ma allora

$$-1 = a_{n-1} = 2 - (a_{n-2})^2$$

da cui $a_{n-2} = \pm\sqrt{3}$. Ma ora osserviamo che essendo $a_1 = \alpha = 1/42$ un numero razionale, e osservando che $\mathbb{Q}$ è un insieme invariante per f (perché? verificare per induzione...) sappiamo che ogni $a_k \in \mathbb{Q}$ e quindi avremmo $a_{n_2} = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$: assurdo.

Stesso discorso si può fare se si avesse $a_n = -2$, in quanto si avrebbe $a_{n-1} = 2$, $a_{n-2} = 0$ e quindi $a_{n-3} = \pm\sqrt{2}$.

Dunque la successione a_n non ammette limite. □

Esercizio 8. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}. \end{cases}$$

Trovare il limite della successione nel caso $\alpha = -2015$. Determinare l'insieme dei valori di α per i quali la succession a_n non è ben definita (in quanto per un qualche n il denominatore $2 - a_n$ si annulla). Trovare il limite nel caso $\alpha = \frac{2015}{1000}$.

Soluzione. Posto $f(x) = 1/(2-x)$ si osserva che la disequazione $f(x) \geq x$ è verificata per ogni $x < 2$. L'equazione di punto fisso $f(x) = x$ ha come unica soluzione $x = 1$. Sull'intervallo $A = (-\infty, 1)$ la funzione f è crescente e l'intervallo risulta essere invariante. Dunque per $\alpha = -2015 \in A$ la successione risulta essere crescente e superiormente limitata. Dunque converge $a_n \to \ell$. Passando al limite in $a_{n+1} = f(a_n)$ si trova che ℓ deve essere un punto fisso di f e quindi $\ell = 1$.

La successione non è ben definita se per qualche n si trovasse $a_n = 2$ in quanto la funzione f non è definita per $x = 2$. Altri valori si ottengono risalendo all'indietro la successione a_n. Dalla equazione

$$a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}$$

si ricava

$$a_{n-1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

L'insieme dei punti partendo da quali si arriva prima o poi in $x = 2$ è dato dunque dai valori della successione

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n}. \end{cases}$$

Osserviamo che in questo caso specifico è possibile ricavare una formula esplicita per il termine b_n. Osserviamo infatti che:

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = \frac{4}{3}$$

e proviamo a congetturare che sia $b_n = (n+1)/n$. In effetti questo si può dimostrare per induzione. Per $n = 1$ si ha $(n+1)/n = 2 = b_1$. E se supponiamo che valga $b_n = (n+1)/n$ si ha

$$b_{n+1} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Dunque l'insieme dei punti partendo dai quali la successione a_n non è ben definita è dato da:

$$X = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Per il caso $\alpha = \frac{2015}{1000}$ osserviamo che sull'intervallo $A_2 = (1, 2)$ si ha sempre $f(x) > x$ (ma si potrebbe osservare che A_2 non è invariante). Finché a_n rimane in tale intervallo la successione risulta quindi crescente. Però non è possibile che la successione simanga sempre in A_2 perché in tal caso dovrebbe convergere a il limite dovrebbe essere un punto fisso. Ma l'unico punto fisso è 1 che è minore di α e quindi la successione, crescente, non può convergere. Necessariamente la successione esce dall'intervallo A_2 (in effetti notiamo che $\alpha \notin X$) e, per un certo n si avrà $a_n > 2$. Osserviamo ora che sull'intervallo $A_3 = (2, +\infty)$ si ha $f(x) < 0$ e dunque se $a_n \in A_2$ necessarimante $a_{n+1} \in A$. Dunque questo caso si riconduce al primo studiato, e la successione tende a 1. □

Esercizio 9. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n}{2}. \end{cases}$$

Determinare al variare di α il limite della successione.

Esercizio 10. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = 1 - a_n^2. \end{cases}$$

Determinare al variare di α il limite della successione.