

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

ESISTENZA E REGOLARITÀ DELLE CONNESSIONI MINIME

Laureanda:
Letizia Ulivi

Relatore:
Dott. Emanuele Paolini

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

Indice

1	Introduzione	1
2	Preliminari	7
2.1	Distanza di Hausdorff	7
2.2	Alcuni richiami di teoria della misura	10
2.3	Misura di Hausdorff e Teorema di Rademacher	14
2.4	Risultati di rettificabilità	22
3	Esistenza dei minimi	31
3.1	Unicità del minimo nel caso in cui Σ sia costituito da due punti	31
3.2	Teorema di Golab	33
3.3	Esistenza delle soluzioni	38
4	Regolarità del minimo	41
4.1	Caso in cui Σ sia finito	41
4.2	Caso in cui Σ sia compatto e numerabile	44
5	Formulazione più generale del problema	55
5.1	Regolarità del minimo nel caso in cui Σ sia compatto con un numero finito di componenti connesse	57

Capitolo 1

Introduzione

Il problema delle connessioni minime consiste nel determinare un insieme di lunghezza minima che connette un certo numero di punti.

L'importanza di tale problema è dovuta all'ampia varietà di interpretazioni e applicazioni pratiche che esso presenta. Un esempio è offerto dalla progettazione, per un centro urbano o per aree più estese, delle varie reti dei servizi, quali la rete idrica, elettrica, del gas o delle reti di telecomunicazione e di trasporto. In ciascuno di tali casi è naturale assumere che i costi (spese di costruzione ed eventuali sprechi di dispersione) siano proporzionali alla lunghezza delle canalizzazioni da costruire. È quindi conveniente, se non ci sono restrizioni, cercare di minimizzare la lunghezza della rete, mantenendo comunque collegate tutte le utenze richieste. Tale ottimizzazione viene utilizzata anche in campo biologico e in settori ingegneristici.

Il caso forse più frequente dell'applicazione del problema delle connessioni minime si ha nella progettazione di circuiti elettronici, dove la ricerca di una rete minima di conduttori del circuito integrato è funzionale per conseguire una maggiore velocità di funzionamento.

Tale problema è stato molto studiato partendo prima dal semplice caso di due soli punti fino ad arrivare a considerarne un numero finito n .

Se infatti l'insieme è costituito da due punti si ha quello che è noto come problema delle geodetiche che consiste nel trovare la curva di lunghezza minima che li congiunge.

Nel caso in cui l'insieme sia costituito da tre punti il problema è conosciuto come:

Problema di Fermat. *Trovare nel piano un punto per cui la somma delle distanze da 3 punti assegnati sia minima.*

Una soluzione geometrica fu proposta da Torricelli prima del

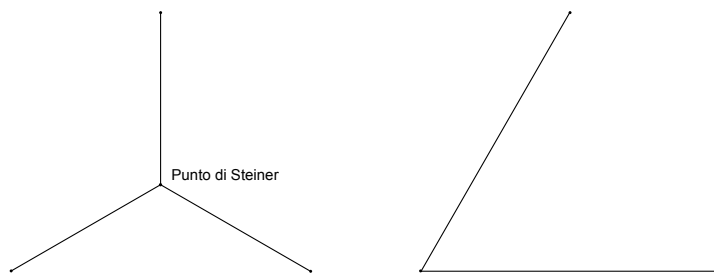


Figura 1: A sinistra la soluzione del Problema di Steiner sui tre vertici di un triangolo equilatero. A destra lo spanning tree sugli stessi vertici. Si nota che la possibilità di aggiungere un nuovo punto permette di diminuire la lunghezza della soluzione.

1640, ma altri importanti matematici, come Cavalieri (1647), Simpson (1750) e Heinen (1834), hanno lavorato a ciò, contribuendo a trovare alcune proprietà di questa costruzione.

Una naturale generalizzazione del Problema di Fermat consiste nel passare da 3 punti assegnati a un numero finito n di punti.

Il problema diventa di tipo combinatorio nel momento in cui lo si formula nell'ambito degli spanning tree, in cui cioè si vanno a cercare le soluzioni tra i grafi finiti che si possono costruire quando l'insieme dei nodi coincide con quello dei punti assegnati.

Una variante più importante, sempre nel caso in cui l'insieme dei punti sia finito, fu proposta da Jarnik e Kössler nel 1934 ed è nota come:

Problema di Steiner. *Trovare il grafo finito di lunghezza minima contenente n punti assegnati.*

Osserviamo come la possibilità di aggiungere nuovi nodi, detti *punti di Steiner*, permetta di “migliorare” il minimo (Figura 1), anche se rende più difficile trovarlo. È stato infatti dimostrato in [5] che il problema è NP-completo, mentre l'algoritmo per determinare lo spanning tree di lunghezza minima ha complessità polinomiale.

In tutti questi problemi la soluzione viene cercata tra i grafi finiti, riducendo quindi a priori l'ambito in cui lavorare. In questa tesi studieremo il problema in un contesto più generale: lavoreremo in \mathbb{R}^N e, al posto della lunghezza, considereremo la misura di Hausdorff unidimensionale.

La formulazione a cui ci riferiremo in seguito è la seguente:

Problema 1.1. *Dato $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ e $T = \{X \subseteq \mathbb{R}^N \mid X \text{ chiuso, connesso, } X \supseteq \Sigma\}$, trovare il $\min\{\mathcal{H}^1(X) \mid X \in T\}$.*

Un problema analogo all'interno degli spazi metrici è stato recen-

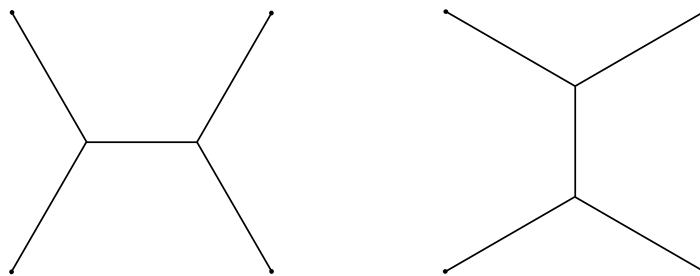


Figura 2: Il minimo può non essere unico.

temente studiato da S. Ducret e M. Troyanov in [4] i quali hanno dimostrato l'esistenza del minimo.

Noi dimostreremo che la soluzione, esiste sempre e, sotto alcune ipotesi, ne descriveremo la regolarità. Vedremo che, nel caso in cui Σ sia costituito da due soli punti il minimo è unico e coincide con un segmento.

Invece nel caso in cui Σ abbia un numero finito di punti si può perdere l'unicità della soluzione (come si può vedere nella Figura 2), ma essa è comunque un'unione finita di segmenti con parte interna disgiunta e quindi un grafo finito. Di conseguenza essa coincide con la soluzione del Problema di Steiner.

Il problema ha senso anche nel caso in cui l'insieme Σ sia compatto e numerabile e anche con tale ipotesi si dimostra che un minimo è unione, questa volta numerabile, di segmenti con parte interna disgiunta a cui eventualmente mancano alcuni punti di Σ .

Modificando la formulazione del problema, ma senza cambiarne il senso, arriviamo a studiare il minimo anche nel caso più interessante in cui l'insieme Σ sia un compatto qualunque, ma con un numero finito di componenti connesse.

Si riesce inoltre a considerare il problema anche nelle ipotesi più generali in cui il minimo sia vincolato ad appartenere ad un sottoinsieme di \mathbb{R}^N . Anche questo punto di vista è interessante per quanto riguarda le applicazioni pratiche in cui l'eventuale presenza di ostacoli riduce lo spazio in cui lavorare.

Piano della tesi

Prima di iniziare a lavorare sul problema vero e proprio riportiamo alcune nozioni a cui ci riferiremo in seguito.

Nel capitolo 2.1 ricordiamo la definizione di *distanza di Hausdorff* (Definizione 2.1) tra sottoinsiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^N

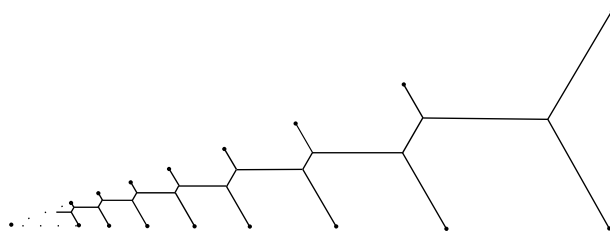


Figura 3: Esempio di una connessione minima su un insieme compatto e numerabile di punti.

e mostriamo che tale spazio fornito di questa metrica è completo (Teorema 2.5) e in particolare compatto (Teorema 2.8).

Nel capitolo 2.2 richiamiamo alcune nozioni della teoria astratta della misura con l'obiettivo di fissare almeno la terminologia e riportiamo alcuni risultati che useremo in seguito per dimostrare il Teorema di Golab (Teorema 3.13).

Nel capitolo 2.3 definiamo la *misura di Hausdorff* (Definizione 2.19) visto che è la misura rispetto alla quale andremo a minimizzare. Riportiamo inoltre alcuni risultati necessari per la dimostrazione Teorema di Rademacher (Teorema 2.29).

Nel capitolo 2.4 dimostriamo alcuni teoremi che servono per arrivare a due risultati di rettificabilità (Teorema 2.35 e Teorema 2.37), in base ai quali ogni compatto connesso con misura di Hausdorff unidimensionale finita è rettificabile. Tutti questi risultati valgono più in generale su uno spazio metrico e si possono trovare in [1].

Nel capitolo 3.1 entriamo nello specifico del nostro problema mostrando che, nel caso in cui l'insieme Σ sia formato da due soli punti, il minimo è unico e coincide con il segmento (Teorema 3.8).

Nel capitolo 3.2 dimostriamo il Teorema di Golab (Teorema 3.13) che fornisce l'inferiore semicontinuità per successioni della misura di Hausdorff unidimensionale e che serve subito dopo per dimostrare l'esistenza del minimo.

Nel capitolo 3.3 dimostriamo l'esistenza del minimo nel caso generico in cui Σ sia un sottoinsieme qualunque non vuoto di \mathbb{R}^N (Teorema 3.15). È una semplice applicazione del metodo diretto del calcolo delle variazioni, in cui sfruttiamo le proprietà della distanza di Hausdorff, viste nel capitolo 2.1, e l'inferiore semicontinuità della misura di Hausdorff data dal Teorema di Golab. Anche questo teorema vale più in generale negli spazi metrici, [1].

Nel capitolo 4.1 mostriamo (Teorema 4.1 e Teorema 4.3) un risultato di regolarità del minimo nel caso in cui l'insieme Σ sia costituito da un numero finito di punti, dimostriamo cioè che il minimo è unione finita di segmenti con parte interna disgiunta, quindi in par-

icolare è un grafo finito o, più precisamente, un albero. Ne segue allora che il minimo tra i compatti connessi coincide con il minimo tra i grafi finiti e quindi possiamo ricollegarci al Problema di Steiner combinatorio.

Nei capitoli 4.2 e 5 presentiamo dei nuovi risultati che riguardano il caso in cui l'insieme Σ sia un compatto qualunque, più precisamente i casi in cui Σ sia numerabile oppure sia formato da un numero finito di componenti connesse. Mostriamo (Teorema 4.6, Teorema 4.17 e osservazioni seguenti) che se Σ è compatto e numerabile, un minimo compatto connesso contenente Σ con misura di Hausdorff unidimensionale finita è unione numerabile di segmenti con parte interna disgiunta a cui eventualmente mancano alcuni punti di Σ .

Anche nelle ipotesi più generali in cui l'insieme Σ sia un compatto qualunque, ma con un numero finito di componenti connesse, modificando opportunamente la formulazione del problema (Problema 5.1), si dimostra che l'insieme può essere connesso da un numero finito di segmenti con parte interna disgiunta (Teorema 5.5).

Nella stessa formulazione viene inoltre preso in considerazione anche “il problema con ostacoli”, ossia il problema nelle ipotesi più generali in cui il minimo sia vincolato ad appartenere ad un sottoinsieme E di \mathbb{R}^N , a causa della presenza di uno o più ostacoli.

Capitolo 2

Preliminari

2.1 Distanza di Hausdorff

Ricordiamo la definizione di distanza di Hausdorff tra sottoinsiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^N e mostriamo che tale spazio fornito di questa metrica è completo, (Teorema 2.5) e in particolare compatto (Teorema 2.8).

Definizione 2.1. Dato (E, d) uno spazio metrico, definiamo

$$BC(E) = \{C \subseteq E \mid C \neq \emptyset, C \text{ chiuso e limitato}\}.$$

Definizione 2.2 (Distanza di Hausdorff). Sia (E, d) uno spazio metrico, per un punto $x \in E$ e un insieme $A \subseteq E$ non vuoto si definisce la *distanza di x da A* come

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Allora la *distanza di Hausdorff tra A e B* è definita per ogni coppia di elementi di $BC(E)$, come

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}.$$

Si vede facilmente che h è effettivamente una distanza su $BC(E)$.

Lemma 2.3. Sia $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di chiusi, connessi non vuoti contenuti in un compatto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ che convergono rispetto alla distanza di Hausdorff a C , allora C è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che C sia sconnesso. Allora $C = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e con A_i non vuoti chiusi e perciò compatti. Si ha allora che $d(A_1, A_2) := d > 0$. Sia $U_i = \{x \in E \mid d(x, A_i) < \frac{d}{3}\}$. Per l'ipotesi di convergenza esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $h(C_n, C) < \frac{d}{3}$. Si verifica facilmente che :

1. gli U_i sono aperti di E e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
2. $C_n \subseteq U_1 \cup U_2$
3. $C_n \cap U_1 \neq \emptyset$ e $C_n \cap U_2 \neq \emptyset$.

Da cui segue che C_n è sconnesso, contro le ipotesi. \square

Definizione 2.4. Siano $A \subseteq E$ e $\varepsilon > 0$, definiamo l' ε -intorno di A come:

$$(A)_\varepsilon = \{x \in E : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Teorema 2.5. Sia (E, d) uno spazio metrico completo. Allora anche $(BC(E), h)$ lo è.

Dimostrazione. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy nello spazio metrico $(BC(E), h)$, allora, pur di prendere una sottosuccessione (se una sottosuccessione di una successione di Cauchy converge, allora l'intera successione converge), possiamo supporre che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h(A_n, A_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Sia $A = \{x \in E : \exists \text{ una successione } \{x_n\}, x_n \in A_n, x_n \rightarrow x\}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

$A \neq \emptyset$. Preso infatti $x_1 \in A_1$, esiste $x_2 \in A_2$ tale che $d(x_1, x_2) \leq 2h(A_1, A_2) \leq \frac{1}{4}$, e così via... Esiste quindi una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ con $x_n \in A_n$ e $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Ogni successione così fatta è di Cauchy. Quindi, poiché (E, d) è completo, esiste $x \in E$ tale che $x_n \rightarrow x$. Dunque $x \in A$.

A è chiuso. Sia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di A tale che $a_i \rightarrow a$. Voglio dimostrare che $a \in A$. Poiché per ogni $i \in \mathbb{N}$ $a_i \in A$, segue che fissato $i \in \mathbb{N}$, esiste una successione $\{x_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_{i,n} \in A_n$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$. Quindi esiste una successione crescente di naturali $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $d(x_{i,m_i}, a_i) \leq d(a_i, a)$ per ogni i . Ciò implica, per la disuguaglianza triangolare, che $d(x_{i,m_i}, a) \leq 2d(a_i, a)$. Da cui segue che $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,m_i} = a$ e quindi, per il lemma di estensione (Lemma 2.6), poiché $x_{i,m_i} \in A_{m_i}$, $a \in A$.

A è limitato, in quanto $A \subseteq (A_n)_{\frac{1}{2^{n-1}}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato infatti $n \in \mathbb{N}$ e $x \in A$, esiste una successione $\{x_k\}_k$ tale che $x_k \in A_k$ e $x_k \rightarrow x$, allora esiste $N > n$ tale che $d(x_N, x) \leq \frac{1}{2^n}$. Partendo da $y_N := x_N$ costruisco quindi una successione $y_N, y_{N-1}, \dots, y_{n+1}, y_n$ in modo che $y_k \in A_k$ e $d(y_k, y_{k+1}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$

per ogni k . Di conseguenza $d(y_N, y_n) \leq \frac{1}{2^n}$ e per la disuguaglianza triangolare $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_N) + d(x_N, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Quindi $d(x, A_n) \leq d(x, y_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Quindi $A \in BC(E)$. Resta infine da mostrare:

$A_n \rightarrow A$ con la distanza di Hausdorff, anzi $h(A_n, A) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ per ogni n . Osserviamo che, fissato n :

$$h(A_n, A) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \iff \begin{cases} A \subseteq (A_n)_{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ A_n \subseteq (A)_{\frac{1}{2^{n-1}}} \end{cases}$$

La prima inclusione si è già vista, resta da mostrare la seconda. Fissato $y \in A_n$, esiste $x_{n+1} \in A_{n+1}$ tale che $d(y, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, analogamente esiste $x_{n+2} \in A_{n+2}$ tale che $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{1}{2^{n+2}}$. Costruiamo dunque una successione $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$ ($x_n := y$) tale che $d(x_j, x_{j+1}) \leq \frac{1}{2^{j+1}}$ per ogni j . Per come è fatta $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$ è di Cauchy e quindi converge ad un $x \in A$. Per la disuguaglianza triangolare, $d(x_j, x) \leq \frac{1}{2^j}$ per ogni $j \geq n$; quindi abbiamo trovato un $x \in A$ tale che $d(y, x) \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, cioè $d(y, A) = \inf_{a \in A} d(y, a) \leq d(y, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

□

Lemma 2.6 (Lemma di estensione). *Siano (E, d) uno spazio metrico, $\{A_n\}$ una successione di Cauchy in $(BC(E), h)$, $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di naturali. Supponiamo di avere una successione di Cauchy $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $x_{n_j} \in A_{n_j}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.*

Allora c'è una successione di Cauchy $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\tilde{x}_n \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ per ogni $j = 1, 2, \dots$.

Dimostrazione. Costruiamo la successione $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ come segue. Per $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ scegliamo $\tilde{x}_n \in A_n$ tale che

$$d(x_{n_1}, \tilde{x}_n) \leq 2d(x_{n_1}, A_n).$$

Analogamente, fissato $j \in \mathbb{N}$, per ogni $n \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$ scegliamo $\tilde{x}_n \in A_n$ tale che $d(x_{n_j}, \tilde{x}_n) \leq 2d(x_{n_j}, A_n)$.

Ora $\tilde{x}_n \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ per ogni $j = 1, 2, \dots$ è ovvio per costruzione. Mostriamo che $\{\tilde{x}_n\}_n$ è di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono N_1 e N_2 tali che

$$\begin{aligned} \forall n_k, n_j \geq N_1 &\Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ \forall n, m \geq N_2 &\Rightarrow h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{6}. \end{aligned}$$

Sia $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dati $n, m \geq N$, scegliamo j e k in modo che $m \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$ e $n \in \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$. Allora, poiché $n_j \geq m \geq N$, si ha $h(A_{n_j}, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{6}$ e

$$d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq 2d(x_{n_j}, A_m) \leq 2h(A_{n_j}, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analogamente $d(\tilde{x}_n, x_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Allora

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon.$$

□

Definizione 2.7. Uno spazio topologico E si dice *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ε -reticolo, ossia $F_\varepsilon \subseteq E$ finito tale che $E \subseteq \bigcup_{x \in F_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$.

Teorema 2.8. Sia (E, d) uno spazio metrico compatto, allora anche $(BC(E), h)$ lo è.

Dimostrazione. Poiché E è compatto, è completo e totalmente limitato. In particolare per ogni $\varepsilon > 0$ esiste F_ε , ε -reticolo di E . Allora $\mathcal{F} := \mathcal{P}(F_\varepsilon)$ è un ε -reticolo di $BC(E)$ e quindi $BC(E)$ è totalmente limitato. Essendo E completo, dal Teorema di completezza (Teorema 2.5), segue che $BC(E)$ è completo e quindi compatto. □

2.2 Alcuni richiami di teoria della misura

Richiamiamo alcune nozioni della teoria astratta della misura con l'obiettivo di fissare almeno la terminologia e riportiamo alcuni risultati che useremo in seguito, per dimostrare il Teorema di Golab (Teorema 3.13).

Dato un insieme E , denotiamo con $\mathcal{P}(E)$ l'insieme delle parti di E . Una famiglia \mathcal{F} è chiamata una σ -algebra se $E \in \mathcal{F}$ e \mathcal{F} è chiuso rispetto al complementare e all'unione finita o numerabile di elementi di \mathcal{F} . Poiché, data una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E)$, esiste sempre la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{M} , se E è uno spazio topologico, denotiamo con $\mathcal{B}(E)$ la σ -algebra dei boreliani di E che è la più piccola σ -algebra contenente tutti gli aperti di E .

Definizione 2.9. Una funzione μ definita su una σ -algebra \mathcal{M} a valori in $[0, +\infty]$ è una *misura* se è numerabilmente additiva, ossia

$$\mu \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

per ogni collezione numerabile di elementi A_i di \mathcal{M} a due a due disgiunti.

Definizione 2.10. Una funzione μ definita su $\mathcal{P}(E)$ di uno spazio E a valori in $[0, +\infty]$ è una *misura esterna* se

$$\mu(\emptyset) = 0,$$

$$\mu(B_1) \leq \mu(B_2) \text{ se } B_1 \subseteq B_2,$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{per ogni successione } \{A_i\}_i \subseteq E.$$

Se μ è una misura esterna, la collezione \mathcal{M} di insiemi μ -misurabili è una σ -algebra e la restrizione di μ a \mathcal{M} è una misura.

Se μ è anche di Caratheodory, ossia se vale l'additività per ogni coppia di insiemi che hanno distanza positiva, allora i boreliani sono μ -misurabili.

Nel caso in cui $\mu(E) < +\infty$ si dice che μ è una misura finita. Se $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(E)$ si dice che μ è una misura di Borel.

Definizione 2.11. Siano E un insieme e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E)$ una σ -algebra; una funzione $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è chiamata una *misura a valori vettoriali* se μ è numerabilmente additiva, ossia

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

ogni volta che gli A_i appartengono ad \mathcal{M} e sono due a due disgiunti. Inoltre si definisce la funzione $|\mu| : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ come

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \mid A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in \mathcal{M} \right\}$$

Tale funzione è chiamata *variazione* di μ , mentre la quantità $|\mu|(E)$ viene detta *variazione totale* di μ .

Si può mostrare che la variazione totale $|\mu|(E)$ è finita e quindi $|\mu|$ è una misura finita (la dimostrazione può essere trovata in [1]).

Definizione 2.12. Sia E uno spazio topologico, denotiamo

$$C_c(E, \mathbb{R}^N) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ continua a supporto compatto}\},$$

$$C_0(E, \mathbb{R}^N) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ continua} \mid \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } K \text{ compatto tale che } |f(x)| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in E \setminus K\},$$

$$M(E, \mathbb{R}^N) = \{\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ misura}\}.$$

Il seguente teorema, la cui dimostrazione può essere trovata in [6], fornisce una corrispondenza tra i funzionali lineari su $C_0(E, \mathbb{R}^N)$ e le misure.

Teorema 2.13 (di rappresentazione di Riesz). *Per ogni funzionale lineare limitato L su $C_0(E, \mathbb{R}^N)$, dove E è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, esiste un'unica misura a valori vettoriali $\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che*

$$L(f) = \int_E f d\mu \quad \text{per ogni } f \in C_0(E, \mathbb{R}^N).$$

Inoltre

$$\|L\|_{C_0(E, \mathbb{R}^N)} = |\mu|(E).$$

Corollario 2.14. *Lo spazio vettoriale $M(E, \mathbb{R}^N)$, con la norma $\|\mu\| := |\mu|(E)$, è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.13 segue che $M(E, \mathbb{R}^N)$ è linearmente isometrico al duale di $C_0(E, \mathbb{R}^N)$. \square

Definizione 2.15. Data una successione $\{\mu_h\}_h \subseteq M(E, \mathbb{R}^N)$, diciamo che *converge debole-star* ad una misura $\mu \in M(E, \mathbb{R}^N)$ e scriviamo $\mu_h \xrightarrow{*} \mu$ se

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_h = \int_E f d\mu \quad \text{per ogni } f \in C_0(E, \mathbb{R}^N).$$

Osserviamo che se lo spazio E è separabile, allora anche lo spazio $C_0(E, \mathbb{R}^N)$ è separabile e, essendo uno spazio di Banach, la topologia debole-star sui limitati è metrizzabile. Quindi, per il Teorema di Banach-Alaoglu, siccome $M(E, \mathbb{R}^N)$ può essere visto come duale di $C_0(E, \mathbb{R}^N)$, da ogni successione $\{\mu_h\}_h$ di variazione totale equilimitata si può estrarre una sottosuccessione $\{\mu_{h_j}\}_j$ tale che $\mu_{h_j} \xrightarrow{*} \mu$ per un qualche $\mu \in M(E, \mathbb{R}^N)$.

Iniziamo con un lemma di approssimazione che mostra come le funzioni inferiormente semicontinue possono essere approssimate dal basso da funzioni lipschitziane.

Lemma 2.16. *Siano $c \in \mathbb{R}$, $u : E \rightarrow [c, +\infty]$ non identicamente uguale a $+\infty$, definiamo per $t > 0$*

$$u_t(x) := \inf\{u(y) + td(x, y) \mid y \in E\}.$$

Allora u_t è una funzione t -lipschitziana, $u_t \leq u$. Inoltre $u_t(x) \nearrow u(x)$ per $t \rightarrow +\infty$ ogni volta che x è un punto di inferiore semicontinuità per u .

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in E$, per definizione di estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in E$ tale che $u_t(x_1) > u(y) + td(x_1, y) - \varepsilon$. Quindi

$$u_t(x_2) - u_t(x_1) < u(y) + td(x_2, y) - u(y) - td(x_1, y) + \varepsilon =$$

$$= t(d(x_2, y) - d(x_1, y)) + \varepsilon \leq td(x_1, x_2) + \varepsilon \rightarrow td(x_1, x_2)$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$. Scambiando quindi il ruolo di x_1 e x_2 , si ottiene che $|u_t(x_2) - u_t(x_1)| \leq td(x_1, x_2)$. Inoltre, fissato x , poiché per ogni y , $u_t(x) \leq u(y) + td(x, y)$, scegliendo $y = x$, si ha che $u_t(x) \leq u(x)$.

Sia ora $x \in E$ un punto di inferiore semicontinuità per u , se $u_t(x) \nearrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, il lemma è dimostrato. Supponiamo allora che $u_t(x)$ converga ad un limite finito e sia $x_t \in E$ tale che

$$u(x_t) + td(x, x_t) < u_t(x) + 2^{-t}$$

cioè $d(x, x_t) < \frac{u_t(x) + 2^{-t}}{t}$ e quindi x_t converge a x per $t \rightarrow +\infty$. Per la scelta di x , passando al limite nella disuguaglianza $u(x_t) < u_t(x) + 2^{-t}$, si ottiene

$$u(x) \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(x_t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} u_t(x)$$

che, insieme a $u_t(x) \leq u(x)$, dà la tesi. \square

Lemma 2.17. *Sia $\{\mu_h\}_h$ una successione di misure positive su uno spazio metrico E tale che $\mu_h \xrightarrow{*} \mu$. Allora, per ogni funzione $u : E \rightarrow [0, +\infty]$ inferiormente semicontinua*

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \int_E u d\mu_h \geq \int_E u d\mu$$

e per ogni funzione $v : E \rightarrow [0, +\infty)$ superiormente semicontinua a supporto compatto

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \int_E v d\mu_h \leq \int_E v d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $u : E \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione inferiormente semicontinua e, escludendo il caso banale $u \equiv +\infty$, sia u_t definita come nel lemma precedente. Consideriamo $\{\psi_k\}_k \subseteq C_c(E)$ tale che $0 \leq \psi_k \leq 1$ e $\psi_k \nearrow 1$ per $k \rightarrow \infty$. Allora

$$\int_E \psi_k u_t d\mu = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_E \psi_k u_t d\mu_h \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_E u_t d\mu_h.$$

Passando al limite su k , per il Teorema di Beppo-Levi, si ha

$$\int_E u_t d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_E u_t d\mu_h,$$

infine, per il lemma precedente, passando al limite su t si ha la tesi.

Sia ora $v : E \rightarrow [0, +\infty)$ superiormente semicontinua a supporto compatto, allora ammette massimo M . Posto $u := M - v$, u è inferiormente semicontinua e quindi la tesi segue da quanto precedentemente dimostrato. \square

Osservazione 2.18. Applicando il lemma precedente alle funzioni caratteristiche di insiemi compatti e aperti si ottiene: se A è aperto

$$\mu(A) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \mu_h(A),$$

se K è compatto

$$\mu(K) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \mu_h(K).$$

2.3 Misura di Hausdorff e Teorema di Rademacher

Dati $X, Y \subseteq \mathbb{R}^N$, denotiamo con $\text{Lip}(X, Y)$ lo spazio delle funzioni lipschitziane definite su X a valori in Y , ossia $f : X \rightarrow Y \in \text{Lip}(X, Y)$ se e solo se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(t) - f(s)| \leq L|t - s|.$$

In tal caso chiamiamo *costante di Lipschitz* di f

$$\text{Lip}(f) := \sup_{t, s \in X} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|}.$$

Ricordiamo inoltre la definizione di misura di Hausdorff, visto che è la misura rispetto alla quale andremo a minimizzare.

Definizione 2.19. Siano (E, d) uno spazio metrico, $B \subseteq E$, $0 \leq s < \infty$ e $\delta > 0$, allora definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left[\frac{\text{diam}(U_i)}{2} \right]^s : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}$$

dove

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \quad e \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Definiamo inoltre la *misura di Hausdorff* di B come:

$$\mathcal{H}^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Elenchiamo alcune proprietà di tale misura che useremo in seguito e che possono essere trovate in [1] e [7].

1. \mathcal{H}_δ^s e \mathcal{H}^s sono misure esterne.
2. \mathcal{H}^s è una misura di Caratheodory, quindi i boreliani sono misurabili secondo \mathcal{H}^s .

3. Se f è una funzione lipschitziana e $B \subseteq \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}^s(f(B)) \leq \text{Lip}(f)\mathcal{H}^s(B)$.
4. $\mathcal{H}^N \equiv \mathcal{L}^N$ su \mathbb{R}^N .

Riportiamo adesso alcuni risultati necessari per la dimostrazione del Teorema di Rademacher (Teorema 2.29).

Definizione 2.20. Siano \mathcal{F} una famiglia di insiemi chiusi nello spazio metrico E e $B \subseteq E$, si dice che \mathcal{F} è un *ricoprimento fine* di B se per ogni $x \in B$ ed ogni $\varepsilon > 0$, esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $x \in V$ e $0 < \text{diam}(V) < \varepsilon$.

Teorema 2.21 (di ricoprimento di Vitali). *Siano E uno spazio metrico, $B \subseteq E$, $\alpha \geq 0$ e \mathcal{F} un ricoprimento fine di B , allora esiste una famiglia numerabile e disgiunta $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ per cui vale una tra le due seguenti affermazioni:*

- (i) $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(V_i)^\alpha = +\infty$
- (ii) $\mathcal{H}^\alpha(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} V_i) = 0$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$ e scegliamo $V_1 \in \mathcal{F}_0$ tale che

$$\text{diam}(V_1) > \frac{1}{2} \sup \{ \text{diam}(V) \mid V \in \mathcal{F}_0 \}.$$

Definiamo poi induttivamente, per $k \geq 1$

$$\mathcal{F}_k := \left\{ V \in \mathcal{F} \mid V \cap \bigsqcup_{i=1}^k V_i = \emptyset \right\},$$

$$d_k := \sup \{ \text{diam}(V) \mid V \in \mathcal{F}_k \}.$$

Se $\mathcal{F}_k = \emptyset$, allora il processo si ferma, altrimenti scegliamo $V_{k+1} \in \mathcal{F}_k$ tale che $\text{diam}(V_{k+1}) > \frac{1}{2}d_k$ e procediamo per induzione.

Se il procedimento si ferma ad un certo $\mathcal{F}_k = \emptyset$, allora (ii) vale in quanto $B \setminus \bigsqcup_{i=1}^k V_i = \emptyset$. Supponiamo infatti, per assurdo, che $B \setminus \bigsqcup_{i=1}^k V_i \neq \emptyset$ non sia vuoto e prendiamo un elemento x al suo interno. Posto $\varepsilon := d(x, \bigsqcup_{i=1}^k V_i)$, poiché $\bigsqcup_{i=1}^k V_i$ è un chiuso, $\varepsilon > 0$ e, per definizione di ricoprimento fine, esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $x \in V$ e $V \cap \bigsqcup_{i=1}^k V_i = \emptyset$, (basta prendere V con $\text{diam}(V) < \frac{\varepsilon}{2}$). Si ha quindi l'assurdo che $V \in \mathcal{F}_k$.

Se invece il procedimento non si ferma, supponiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(V_i)^\alpha < +\infty.$$

Scegliamo, per ogni i , $x_i \in V_i$ e consideriamo, per un certo $k \geq 1$, un punto $x \in B \setminus \bigsqcup_{i=1}^k V_i$. Come sopra, per definizione di ricoprimento fine, esiste $V \in \mathcal{F}$ tale che $x \in V$ e $V \cap \bigsqcup_{i=1}^k V_i = \emptyset$. Allora $V \in \mathcal{F}_k$ e quindi $\text{diam}(V) \leq d_k < 2\text{diam}(V_{k+1})$.

Osserviamo che, se per ogni $n > k$, $V \cap \bigsqcup_{i=1}^n V_i = \emptyset$, allora $\text{diam}(V) < 2\text{diam}(V_{n+1})$ e, poiché dalla convergenza della serie segue che $\text{diam}(V_n) \rightarrow 0$, si avrebbe l'assurdo che $\text{diam}(V) = 0$. Esiste quindi $n > k$ per cui $V \cap V_n \neq \emptyset$. Sia n il più piccolo indice con questa proprietà, allora $V \cap \bigsqcup_{i=1}^{n-1} V_i = \emptyset$, da cui segue che $\text{diam}(V) < 2\text{diam}(V_n)$ e

$$d(x, x_n) \leq \text{diam}(V) + \text{diam}(V_n) < 3\text{diam}(V_n).$$

Abbiamo cioè mostrato che, se $x \in B \setminus \bigsqcup_{i=1}^k V_i$, allora x è contenuto in una palla centrata in x_n e di raggio $3\text{diam}(V_n)$, per un qualche $n > k$. Di conseguenza, per $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^\alpha \left(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^k V_i \right) &\leq \mathcal{H}_\delta^\alpha \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} B(x_i, 3\text{diam}(V_i)) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^\alpha (B(x_i, 3\text{diam}(V_i))). \end{aligned}$$

Se k è abbastanza grande, $6\text{diam}(V_i) < \delta$ per ogni $i > k$, allora

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha \left(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} V_i \right) \leq \mathcal{H}_\delta^\alpha \left(B \setminus \bigsqcup_{i=1}^k V_i \right) \leq \frac{\omega_\alpha}{2^\alpha} \sum_{i=k+1}^{\infty} (6\text{diam}(V_i))^\alpha.$$

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ si ottiene $\mathcal{H}_\delta^\alpha (B \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} V_i) = 0$ e il punto (ii) segue dall'arbitrarietà di $\delta > 0$. \square

Teorema 2.22 (di Lebesgue). *Sia $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, allora si ha che*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^N\text{-quasi ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Supponiamo $g \geq 0$, localmente integrabile e costante fuori da un compatto K . Definiamo, per $x \in \mathbb{R}^N$

$$\bar{g}(x) := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} g(y) dy.$$

Per q razionale, sia $B_q := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \bar{g}(x) > q > g(x)\}$ e scegliamo un aperto limitato A tale che $A \supseteq B_q$ (un tale A esiste in quanto $B_q \subseteq K$ e K è limitato). Osserviamo che

$$\mathcal{F} := \left\{ \overline{B_r(x)} \mid x \in B_q, \overline{B_r(x)} \subset A \text{ e } \int_{B_r(x)} g(y) dy > q \mathcal{L}^N(B_r(x)) \right\}$$

è un ricoprimento fine di B_q . Allora, per il Teorema di ricoprimento di Vitali, esiste una sottofamiglia numerabile e disgiunta $\{\overline{B_{r_i}(x_i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ per cui vale uno dei due punti del teorema. Il caso (i) si esclude, infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \text{diam}(\overline{B_{r_i}(x_i)})^N &= \sum_{i=1}^{+\infty} (2r_i)^N = \frac{2^N}{\omega_N} \sum_{i=1}^{+\infty} \omega_N r_i^N = \\ &= \frac{2^N}{\omega_N} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{L}^N(\overline{B_{r_i}(x_i)}) = \frac{2^N}{\omega_N} \mathcal{L}^N\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{B_{r_i}(x_i)}\right) \leq \\ &\leq \frac{2^N}{\omega_N} \mathcal{L}^N(A) < +\infty \end{aligned}$$

essendo A limitato. Quindi la sottofamiglia $\{\overline{B_{r_i}(x_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ copre tutto B_q tranne un insieme di misura nulla. Supponiamo per assurdo $\mathcal{L}^N(B_q) > 0$, allora

$$\begin{aligned} \int_A g(y) dy &\geq \sum_i \int_{B_{r_i}(x_i)} g(y) dy > q \sum_i \mathcal{L}^N(B_{r_i}(x_i)) = \\ &= q \mathcal{L}^N\left(\bigcup_i B_{r_i}(x_i)\right) = q \mathcal{L}^N(B_q). \end{aligned}$$

Per la definizione di misura, esiste una successione di aperti $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $A_j \supseteq B_q$ tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^N(A_j) = \mathcal{L}^N(B_q),$$

quindi $\mathcal{L}^N(A_j \setminus B_q) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$. Dall'assoluta continuità dell'integrale, segue quindi che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un j per cui $\mathcal{L}^N(A_j \setminus B_q)$ è abbastanza piccola e tale che

$$\varepsilon > \int_{A_j \setminus B_q} g(y) dy = \int_{A_j} g(y) dy - \int_{B_q} g(y) dy$$

ossia $\int_{B_q} g(y) dy \geq q \mathcal{L}^N(B_q)$, che è una contraddizione in quanto $g < q$ su B_q .

Quindi $\mathcal{L}^N(B_q) = 0$. Allora, posto $B := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \bar{g}(x) > g(x)\}$, si ha che, essendo anche $B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} B_q$, B ha misura nulla e quindi $\bar{g} \leq g$ quasi ovunque.

Lo stesso risultato vale per funzioni $h \geq 0$ e $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Sia infatti, per $x \in \mathbb{R}^N$ e $m \in \mathbb{N}$

$$h_m(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in \overline{B_m(0)} \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{B_m(0)} \end{cases}$$

allora $\bar{h}_m \leq h_m$ quasi ovunque e, poiché $\lim_{m \rightarrow +\infty} h_m(x) = h(x)$, si ha che $\bar{h} \leq h$ quasi ovunque.

Sia ora $g_q(y) := |f(y) - q|$, applicando a g_q quanto appena dimostrato, si ottiene che, per quasi ogni x ,

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy \leq \\ & \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} g_q(y) + |q - f(x)| dy = \\ & = \overline{g_q(x)} + |q - f(x)| \leq g_q(x) + |q - f(x)| = 2|q - f(x)| \end{aligned}$$

e, poiché q può essere preso arbitrariamente vicino ad $f(x)$, segue la tesi. \square

Definizione 2.23. Diciamo che x è un *punto di Lebesgue* per $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ se

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy = f(x).$$

Corollario 2.24. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, allora, per \mathcal{L}^N -quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, x è un punto di Lebesgue.

Definizione 2.25. Se μ è un misura su uno spazio metrico E , per ogni reale $k \geq 0$ ed ogni $x \in E$, definiamo

$$\bar{\theta}_k(\mu, x) := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}, \quad \underline{\theta}_k(\mu, x) := \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}.$$

Le quantità sopra definite sono chiamate rispettivamente *densità k -dimensionale superiore e inferiore* della misura μ nel punto x .

Osservazione 2.26. Nelle definizioni sopra si può sostituire $B_r(x)$ con la chiusura $\overline{B_r(x)}$, senza che sia modificato il valore di $\bar{\theta}_k(\mu, x)$ e $\underline{\theta}_k(\mu, x)$, ad esempio per la densità superiore

$$\frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k} \leq \frac{\mu(\overline{B_r(x)})}{\omega_k r^k} \leq \frac{\mu(B_{r(1+\varepsilon)}(x))}{\omega_k (r(1+\varepsilon))^k} \frac{(r(1+\varepsilon))^k}{r^k}.$$

Passando al \limsup si ha

$$\bar{\theta}_k(\mu, x) \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\overline{B_r(x)})}{\omega_k r^k} \leq \bar{\theta}_k(\mu, x)(1+\varepsilon)^k$$

e, per $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene la tesi.

Teorema 2.27. *Sia μ una misura di Borel positiva e finita in E . Allora, per ogni $t \in (0, +\infty)$ ed ogni boreliano $B \subseteq E$, se $\bar{\theta}_k(\mu, x) \geq t$ per ogni $x \in B$, allora $\mu(B) \geq t\mathcal{H}^k(B)$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si può assumere che $t = 1$. Siano $\delta \in (0, 1)$, $A \subseteq E$ aperto contenente B e consideriamo tutte le palle chiuse $C \subseteq A$ centrate in punti di B e con diametro $d_C < \delta$ e tali che $\mu(C) \geq (1 - \delta)\omega_k d_C^k / 2^k$.

Questo insieme è un ricoprimento fine di B . Sia infatti $x \in B$ e $\varepsilon > 0$ e consideriamo $C = \overline{B_r(x)}$ con r tale che $0 < 2r = d_C < \min\{\delta, \varepsilon\}$ e comunque abbastanza piccolo per far in modo che C sia contenuto in A , allora $\mu(C) \geq (1 - \delta)\omega_k d_C^k / 2^k$, in quanto: se per assurdo $\mu(C) < (1 - \delta)\omega_k d_C^k / 2^k = (1 - \delta)\omega_k r^k$ si avrebbe, per ogni r sufficientemente piccolo

$$\bar{\theta}_k(\mu, x) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\overline{B_r(x)})}{\omega_k r^k} < 1 - \delta < 1,$$

contro l'ipotesi. Per il Teorema di ricoprimento di Vitali esiste quindi una sottofamiglia numerabile e disgiunta $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ per cui vale uno dei due punti del teorema. Se vale (ii), ossia se $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ copre \mathcal{H}^k -quasi tutto B (e quindi \mathcal{H}_δ^k -quasi tutto B), allora

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) \leq \sum_i \frac{\omega_k}{2^k} d_{C_i}^k \leq \frac{1}{1 - \delta} \sum_i \mu(C_i) \leq \frac{1}{1 - \delta} \mu(A)$$

e, dall'arbitrarietà di δ e di A , segue che $\mathcal{H}^k(B) \leq \mu(B)$ e quindi la tesi. Se invece vale il punto (i), dalla disuguaglianza

$$+\infty = \sum_i \frac{\omega_k}{2^k} d_{C_i}^k \leq \frac{1}{1 - \delta} \mu(A)$$

segue l'assurdo che $\mu(A) = +\infty$. □

Lemma 2.28. *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ con un rappresentate lipschitziano, allora il gradiente in senso debole di f appartiene ad $L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Siano $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\nu \in \mathbb{R}^N$ con $|\nu|=1$. Allora

$$\begin{aligned} |T(v)| &:= \left| \int f(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) dx \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int f(x) \frac{v(x + h\nu) - v(x)}{h} dx \right| = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int \frac{f(x - h\nu) - f(x)}{h} v(x) dx \right| \leq \text{Lip}(f) \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

ossia T è un funzionale limitato e quindi continuo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Quindi, per il Teorema di dualità di Riesz, esiste un'unica

funzione $L_\nu \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tale che $\|L_\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|T\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ e $T(v) = -\int L_\nu(x)v(x)dx$ per ogni $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, cioè,

$$\int f(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) dx = -\int L_\nu(x)v(x) dx \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Fissato x , per il Teorema fondamentale del calcolo delle variazioni, il funzionale $\nu \mapsto L_\nu(x)$ è lineare. Esiste quindi un vettore in \mathbb{R}^N , dipendente da f e da x , che indico con $\nabla f(x)$, tale che $L_\nu(x) = (\nabla f(x), \nu)$. $\nabla f(x)$ è proprio il gradiente in senso debole di f in quanto

$$\int f(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) dx = -\int (\nabla f(x), \nu)v(x) dx \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Inoltre $\nabla f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ infatti:

$$|\nabla f(x)| = \sup_{|\nu| \leq 1} |(\nabla f(x), \nu)| = \sup_{|\nu| \leq 1} |L_\nu(x)| \leq \text{Lip}(f).$$

□

Teorema 2.29 (di Rademacher). *Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^N e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana, allora f è differenziabile in quasi ogni punto $x \in \Omega$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2.28 il gradiente in senso debole di f può essere rappresentato da una funzione $\nabla f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. La tesi segue dal Teorema di Lebesgue se proviamo che f è differenziabile in ogni punto $x \in \Omega$ tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} |\nabla f(y) - \nabla f(x)| dy = 0.$$

Prendiamo un tale x e definiamo

$$f_r(y) = \frac{f(x + ry) - f(x)}{r} \quad \text{per ogni } y \in \bar{B}$$

dove $B = B_1(0)$. Poiché $\text{Lip}(f_r) \leq \text{Lip}(f)$, presa una successione $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $r_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, $\{f_{r_k}\}_k$ è equicontinua ed equilimitata sul compatto \bar{B} , quindi, per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione $\{f_{r_{k_i}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente ad una funzione g su \bar{B} .

Mostriamo che $g(y) = (\nabla f(x), y)$. Dalla definizione di derivata debole, cambiando variabile e applicando il Teorema della divergenza, si vede facilmente che $\nabla f(x + r_{k_i}y)$ è la derivata debole di $f_{r_{k_i}}(y)$.

Inoltre $\|\nabla f(x + r_{k_i}y) - \nabla f(x)\|_{L^1} \rightarrow 0$ per $i \rightarrow +\infty$, infatti, posto $z = x + r_{k_i}y$, per la scelta di x , si ha

$$\begin{aligned} & \int_{B_1(0)} |\nabla f(x + r_{k_i}y) - \nabla f(x)| dy = \\ & = \int_{B_{r_{k_i}}(x)} |\nabla f(z) - \nabla f(x)| \frac{1}{r_{k_i}^N} dz \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni direzione $\nu \in \partial B$ ed ogni $v \in C_c^\infty(B)$, si ha

$$\begin{aligned} \int_B g(y) \frac{\partial v}{\partial \nu} dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_B f_{r_{k_i}}(y) \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) dy = \\ &= - \lim_{i \rightarrow \infty} \int_B (\nabla f(x + r_{k_i}y), \nu) v(y) dy = \\ &= - \int_B (\nabla f(x), \nu) v(y) dy = \int_B (\nabla f(x), y) \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) dy \end{aligned}$$

e l'ultima uguaglianza segue dal Teorema di Gauss-Green. Allora

$$\int_B [g(y) - (\nabla f(x), y)] \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) dy = 0 \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(B).$$

Dall'arbitrarietà di v , segue che $g(y) - (\nabla f(x), y)$ è costante e, essendo $f_r(0) = 0$, tale costante è zero e allora si ha che $g(y) = (\nabla f(x), y)$. Quindi $f_{r_{k_i}}(y) \rightarrow (\nabla f(x), y)$ uniformemente per $i \rightarrow +\infty$. Allora

$$\begin{aligned} & \sup_{|h|=r_{k_i}} \frac{|f(x+h) - f(x) - (\nabla f(x), h)|}{|h|} = \\ & = \sup_{|h|=r_{k_i}} \frac{|f(x + |h|\frac{h}{|h|}) - f(x) - (\nabla f(x), |h|\frac{h}{|h|})|}{|h|} = \\ & = \sup_{|h|=r_{k_i}} |f_{|h|}(\frac{h}{|h|}) - (\nabla f(x), \frac{h}{|h|})| \leq \sup_{y \in \bar{B}} |f_{r_{k_i}}(y) - (\nabla f(x), y)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

per $i \rightarrow +\infty$, ossia, per ogni successione $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a 0, tramite il Teorema di Ascoli-Arzelà, si può trovare una sottosuccessione su cui il limite scritto sopra è zero. Allora il limite è zero su ogni successione infinitesima e quindi è zero per $r \rightarrow 0$. Da cui segue che f è differenziabile in x . \square

2.4 Risultati di rettificabilità

Dimostriamo alcuni teoremi che servono per arrivare a due risultati di rettificabilità in base ai quali ogni compatto connesso con misura di Hausdorff unidimensionale finita è rettificabile.

Definizione 2.30. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si definisce

$$\text{Var}_{a'}^{b'}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \quad \mid \quad a' \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b' \right\}$$

con $a \leq a' \leq b' \leq b$. Indichiamo con $\text{Var}(\gamma) = \text{Var}_a^b(\gamma)$ la *variazione totale* di γ .

Teorema 2.31. Per ogni curva lipschitziana $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si ha che

$$\text{Var}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Dimostrazione. Poiché γ è continua, la sua immagine $[\gamma] = \gamma([a, b])$ è compatta e quindi separabile, cioè esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ densa in $[\gamma]$. Sia $\varphi_n(t) := |\gamma(t) - x_n|$, è lipschitziana e quindi, per il Teorema di Rademacher (Teorema 2.29), la derivata $\dot{\varphi}_n(t)$ esiste per \mathcal{L}^1 -quasi ogni punto di $[a, b]$. Definiamo

$$m(t) := \sup_n |\dot{\varphi}_n(t)|$$

e proviamo che

$$|\dot{\gamma}(t)| = m(t) \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-quasi ogni } t.$$

Osserviamo che, per la disuguaglianza triangolare, $|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)| = ||\gamma(t+h) - x_n| - |\gamma(t) - x_n|| \leq |\gamma(t+h) - \gamma(t)|$ da cui segue che, per ogni n , $\text{Lip}(\varphi_n) \leq \text{Lip}(\gamma)$ e

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|h|} \geq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)|}{|h|} = |\dot{\varphi}_n(t)|$$

per quasi ogni $t \in [a, b]$ e, prendendo l'estremo superiore su n , si ottiene

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|h|} \geq m(t) \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-quasi ogni } t \in [a, b]$$

da cui segue che $m(t) \leq |\dot{\gamma}(t)|$ \mathcal{L}^1 -quasi ovunque. Dall'altra parte, abbiamo $|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq |\gamma(t) - \gamma(s)|$, inoltre, per densità,

esiste una successione $\{x_{n_k}\}$ che converge a $\gamma(s)$ e quindi $|\varphi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(s)| \rightarrow |\gamma(t) - \gamma(s)|$. Da cui si ha

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma(s)| &= \sup_n \left| |\gamma(t) - x_n| - |\gamma(s) - x_n| \right| \leq \\ &\leq \sup_n \int_s^t |\dot{\varphi}_n(\tau)| d\tau \leq \int_s^t m(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Osserviamo che $|m(t)| \leq |\dot{\gamma}(t)| \leq \text{Lip}(\gamma)$ e che m è integrabile su $[a, b]$. Se $t \in (a, b)$ è un punto di Lebesgue per m , dalla disuguaglianza precedente, si ottiene

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|h|} \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} m(\tau) d\tau \right| = m(t).$$

Poiché $m \in L^1([a, b])$, quasi ogni $t \in [a, b]$ è un punto di Lebesgue per m e quindi $m(t) \geq |\dot{\gamma}(t)|$. Abbiamo quindi dimostrato che $|\dot{\gamma}(t)| = m(t)$ da cui segue

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$$

per ogni scelta $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$. Prendendo l'estremo superiore su tutte le partizioni, si ottiene che $\text{Var}(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$.

Per provare la disuguaglianza opposta, scelto $\varepsilon > 0$, siano $h = (b-a)/n$ e $t_i = a + ih$ con $n \geq 2$, un naturale per cui $h \leq \varepsilon$ e osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_a^{b-\varepsilon} |\gamma(t+h) - \gamma(t)| dt &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i=0}^{n-2} |\gamma(\tau + t_{i+1}) - \gamma(\tau + t_i)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \text{Var}(\gamma) dt = \text{Var}(\gamma) \end{aligned}$$

(poiché $a \leq \tau + t_i \leq b$ per ogni $\tau \in (0, h)$ ed ogni $i = 0, \dots, n-1$, l'ultima disuguaglianza segue dalla definizione di $\text{Var}(\gamma)$). Allora, dal Lemma di Fatou, si ha che

$$\begin{aligned} \int_a^{b-\varepsilon} |\dot{\gamma}(t)| dt &= \int_a^{b-\varepsilon} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{|h|} dt \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_a^{b-\varepsilon} |\gamma(t+h) - \gamma(t)| dt \leq \text{Var}(\gamma). \end{aligned}$$

La disuguaglianza $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \text{Var}(\gamma)$ segue dall'arbitrarietà di ε . \square

Teorema 2.32 (riparametrizzazione). *Sia $\gamma \in \text{Lip}([a, b], \mathbb{R}^N)$ e sia $L = \text{Var}(\gamma)$ la sua variazione totale, allora esiste una curva lipschitziana $\tilde{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che $|\dot{\tilde{\gamma}}| = 1$ quasi ovunque in $[0, L]$ e $\tilde{\gamma}([0, L]) = \gamma([a, b])$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si può assumere $a = 0$. Posto $l(t) = \text{Var}_0^t(\gamma)$ per $t \leq b$, definiamo

$$h(t) = \inf\{s \in [0, b] \mid l(s) = t\} \quad \text{con } t \in [0, L]$$

e osserviamo che l è lipschitziana, $h(0) = 0$, $h(L) \leq b$, $l(h(t)) = t$ per $t \in [0, L]$ e h è non decrescente. Inoltre, per $s \in [0, b]$, $\gamma(s) = \gamma(h(l(s)))$ in quanto $h(l(s)) \leq s$ e

$$|\gamma(h(l(s))) - \gamma(s)| \leq \text{Var}_{h(l(s))}^s(\gamma) = l(s) - l(h(l(s))) = l(s) - l(s) = 0.$$

Poniamo infine

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(h(t)) \quad \text{con } t \in [0, L]$$

e mostriamo che $\tilde{\gamma}$ ha le proprietà richieste. Da quanto osservato sopra segue l'uguaglianza $\tilde{\gamma}([0, L]) = \gamma([a, b])$. Inoltre dalla definizione di $h(t)$ si ha

$$\text{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) = t \quad \text{per ogni } t \in [0, L].$$

Infatti, se $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$, posto $s_i = h(t_i)$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |\tilde{\gamma}(t_{i+1}) - \tilde{\gamma}(t_i)| &= \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(s_{i+1}) - \gamma(s_i)| \leq \\ &\leq \text{Var}_0^{s_n}(\gamma) = l(s_n) = t_n \leq t. \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore sulle partizioni, si ha che $\text{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) \leq t$. Dall'altra parte, per $t \in [0, L]$ e $\varepsilon > 0$, esistono $0 = s_1 \leq \dots \leq s_n = h(t)$ tali che

$$l(s_n) = l(h(t)) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(s_{i+1}) - \gamma(s_i)|$$

e quindi

$$\begin{aligned} t &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(h(l(s_{i+1}))) - \gamma(h(l(s_i)))| = \\ &= \varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |\tilde{\gamma}(l(s_{i+1})) - \tilde{\gamma}(l(s_i))| \leq \varepsilon + \text{Var}_{l(s_1)}^{l(s_n)}(\tilde{\gamma}) = \\ &= \varepsilon + \text{Var}_0^{l(h(t))}(\tilde{\gamma}) = \varepsilon + \text{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) \end{aligned}$$

e, dall'arbitrarietà di ε , si ha che $\text{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) \geq t$. In particolare, poiché $|\gamma(t+h) - \gamma(t)| \leq l(t+h) - l(t)$, $\tilde{\gamma}$ è 1-lipschitziana. Infine, dal Teorema 2.31, si ottiene

$$t = \text{Var}_0^t(\tilde{\gamma}) = \int_0^t |\dot{\tilde{\gamma}}(\tau)| d\tau \quad \text{per ogni } t \in [0, 1]$$

e derivando rispetto a t , si ha $|\dot{\tilde{\gamma}}(t)| = 1$ per quasi ogni t . \square

Teorema 2.33. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un compatto, dati $x, y \in E$ il problema $\min\{\text{Var}(\gamma) \mid \gamma \in \text{Lip}([a, b], E) \text{ con } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$ ammette soluzione, se la classe delle curve lipschitziane che uniscono x con y non è vuota. Inoltre la soluzione γ è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia L il valore dell'estremo inferiore del problema e sia $\{\gamma_n\}_n$ una successione minimizzante, cioè tale che

$$\gamma_n : [a, b] \rightarrow E, \quad \gamma_n(a) = x, \quad \gamma_n(b) = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$$

dove $L_n = \text{Var}(\gamma_n)$. Senza perdita di generalità si può assumere $L > 0$ (altrimenti $x = y$ e la tesi è banale) e che $L_n \leq L + 1$. Per il Teorema di riparametrizzazione, si può assumere che $\gamma_n(s)$ sia definita in $[0, L_n]$ con $|\dot{\gamma}_n| = 1$ quasi ovunque. Con un altro cambio di variabile ($s \mapsto sL/L_n$) si può assumere che ogni γ_n sia definita su $[0, L]$ e $|\dot{\gamma}_n| = L_n/L$. In particolare $\text{Lip}(\gamma_n) \leq (L+1)/L$ e quindi la successione $\{\gamma_n\}$ è equicontinua. Poiché abbiamo supposto E compatto, dal Teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di estratta, γ_n converge uniformemente su $[0, L]$ a una funzione lipschitziana γ . Osserviamo che, fissata una partizione $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ il funzionale

$$F : \text{Lip}([0, L], E) \rightarrow \mathbb{R}$$

definito da $F(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$ è continuo rispetto alla convergenza uniforme. Di conseguenza, il funzionale

$$\text{Var} : \text{Lip}([0, L], E) \rightarrow \mathbb{R}$$

(come estremo superiore di una famiglia di funzionali continui) è inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza uniforme. Quindi, poiché γ_n converge uniformemente a γ , si ha

$$L \leq \text{Var}(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\gamma_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} L_n = L$$

e quindi γ è un minimo. Per dimostrare l'iniettività di γ , mostriamo prima che

$$|\dot{\gamma}(t)| = 1 \quad \text{per quasi ogni } t \in [0, L].$$

Infatti

$$|\gamma(t+h) - \gamma(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |h| \frac{L_n}{L} = |h|.$$

Quindi γ è 1-lipschitziana e $|\dot{\gamma}(t)| \leq 1$ quasi ovunque. Inoltre, dal Teorema 2.31, si ha

$$L = \text{Var}(\gamma) = \int_0^L |\dot{\gamma}(t)| dt$$

da cui segue che $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ quasi ovunque. Supponiamo ora, per assurdo, che γ non sia iniettiva, ossia che esistano $t_1 < t_2$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ e definiamo

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [0, t_1] \\ \gamma(t_2 - t_1 + t) & \text{se } t \in (t_1, L + t_1 - t_2]. \end{cases}$$

Allora $\tilde{\gamma}$ connette x con y e si ha che

$$\text{Var}(\gamma) - \text{Var}(\tilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = t_2 - t_1 > 0$$

ossia che $\text{Var}(\gamma) > \text{Var}(\tilde{\gamma})$, contro il fatto che γ è un minimo. \square

Definizione 2.34. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ e $x, y \in X$, si dice che x, y sono ε -connessi in X se esistono $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $x_1 = x$, $x_n = y$ e $|x_i - x_{i+1}| \leq \varepsilon$. In tal caso si dice che $\{x_1, \dots, x_n\}$ è una ε -catena in X che unisce x con y .

Teorema 2.35 (primo teorema di rettificabilità). *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ compatto, connesso e tale che $\mathcal{H}^1(X) < +\infty$, allora X è connesso da curve iniettive e lipschitziane.*

Dimostrazione. Per $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, definiamo

$$C'_x := \{y \in X \mid x \text{ e } y \text{ sono } \varepsilon\text{-connessi in } X\}.$$

È facile vedere che C'_x è aperto e chiuso e quindi, poiché X è connesso e $C'_x \neq \emptyset$, $C'_x = X$. Da cui segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $y \in X$, si può trovare una ε -catena $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ che unisce x con y . Inoltre, riducendo la catena, se necessario, si può assumere che

$$|x_i - x_j| > \varepsilon \quad \text{se} \quad |i - j| > 1.$$

Osserviamo che, dalla precedente disuguaglianza, segue che due pal-
le distinte $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$ sono a distanza positiva se i, j sono

entrambi pari o entrambi dispari. Quindi

$$\mathcal{H}^1(X) \geq \mathcal{H}^1\left(X \cap \bigcup_{i \text{ pari}} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)\right) = \sum_{i \text{ pari}} (X \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)).$$

Se $\varepsilon < \text{diam}(X)$, dal Lemma 3.1, segue che

$$\mathcal{H}^1(X) \geq \sum_{i \text{ pari}} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da tale disuguaglianza, unita all'analoga fatta con gli indici dispari, si ottiene

$$2\mathcal{H}^1(X) \geq n \frac{\varepsilon}{2}$$

che quindi ci fornisce un limite superiore per il numero di elementi n della ε -catena. Quindi, dati $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \text{diam}(X)$, si può trovare una ε -catena $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ che connette x con y e tale che $n \leq 4\mathcal{H}^1(X)/\varepsilon$. Posto $L = 4\mathcal{H}^1(X)$, sia $\gamma_\varepsilon : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ curva parametrizzata in ascissa curvilinea tale che esiste una partizione $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq L$ per cui $\gamma_\varepsilon(t_i) = x_i$ e $t_{i+1} - t_i = |x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$. γ_ε è lineare a tratti e $|\dot{\gamma}_\varepsilon(t)| = 1$ in quanto t è l'ascissa curvilinea; quindi γ_ε è 1-lipschitziana e di conseguenza $\{\gamma_\varepsilon\}_\varepsilon$ è equicontinua. Dal Teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di estratta, $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma$ uniformemente, con γ 1-lipschitziana.

Sia $t \in [0, L]$ e $\varepsilon > 0$, allora esiste $t_\varepsilon \in [0, L]$ tale che $|t_\varepsilon - t| \leq \varepsilon$ e $\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon) \in X$. Allora, poiché $t_\varepsilon \rightarrow t$ e $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma$ uniformemente

$$\begin{aligned} |\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon) - \gamma(t)| &\leq |\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon) - \gamma(t_\varepsilon)| + |\gamma(t_\varepsilon) - \gamma(t)| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0, L]} |\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon) - \gamma(t)| + |\gamma(t_\varepsilon) - \gamma(t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ed essendo X chiuso, $\gamma(t) \in X$ per ogni $t \in [0, L]$. Abbiamo così ottenuto l'esistenza di una funzione lipschitziana $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ che unisce x con y . L'esistenza di una curva iniettiva lipschitziana che congiunge x con y segue dal Teorema 2.33 applicato al compatto X . \square

Lemma 2.36. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continua, allora*

$$\mathcal{H}^1(\gamma[a, b]) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|.$$

Dimostrazione. Definiamo $\varphi(x) := |x - \gamma(a)|$. Allora $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è 1-lipschitziana, quindi, posto $\Gamma = \gamma([a, b])$, si ha

$$\mathcal{H}^1(\varphi(\Gamma)) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

Ora $\varphi(\Gamma)$ è un intervallo di \mathbb{R} compatto contenente $\varphi(\gamma(a)) = 0$ e $\varphi(\gamma(b)) = |\gamma(b) - \gamma(a)|$. Quindi

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \mathcal{H}^1(\varphi(\Gamma)) \geq |\gamma(a) - \gamma(b)|.$$

□

Teorema 2.37 (secondo teorema di rettificabilità). *Se $C \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto connesso e tale che $\mathcal{H}^1(C) < +\infty$, allora esiste una famiglia numerabile di curve lipschitziane $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow C$ tali che*

$$\mathcal{H}^1\left(C \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i([0, 1])\right) = 0.$$

Dimostrazione. Essendo C compatto, si può scegliere $x, y \in C$ tali che $|x - y| = \text{diam}(C)$. Sia $[\gamma_0]$ l'immagine della curva lipschitziana congiungente x con y (che esiste per il primo Teorema di rettificabilità, Teorema 2.35). Supponiamo di aver già costruito $[\gamma_0], \dots, [\gamma_k]$, tali che, per $i = 1, \dots, k$, si ha $[\gamma_i] \subseteq C$ ed ogni intersezione $[\gamma_i] \cap \bigcup_{j < i} [\gamma_j]$ consiste di un solo punto. Sia

$$d_k := \max_{x \in C} d\left(x, \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]\right).$$

Se $d_k = 0$ la tesi è dimostrata con un numero finito di curve. Se $d_k > 0$, per compattezza si può scegliere $x_k \in C$ e $y_k \in \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$ tali che $|x_k - y_k| = d_k$. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ una curva lipschitziana tale che $\gamma(0) = x_k$ e $\gamma(1) = y_k$. Poniamo $\tilde{t} := \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]\}$ e osseviamo che è un minimo. Sia infatti t_j una successione minizzante, ossia tale che $t_j \rightarrow \tilde{t}$ e $\gamma(t_j) \in \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$. Poiché γ è continua $\gamma(t_j) \rightarrow \gamma(\tilde{t})$ e, essendo $\bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$ chiuso, segue che $\gamma(\tilde{t}) \in \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$. Definendo $[\gamma_{k+1}] := \gamma([0, \tilde{t}])$, si ottiene che l'intersezione

$$[\gamma_{k+1}] \cap \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$$

consiste di un solo punto. Dal Lemma 2.36 si ottiene

$$d_k \leq |x_k - \gamma(\tilde{t})| \leq \mathcal{H}^1([\gamma_{k+1}]),$$

da cui segue

$$\sum_{i=0}^k d_i \leq \sum_{i=0}^k \mathcal{H}^1([\gamma_{i+1}]) \leq \mathcal{H}^1(C) < +\infty.$$

Procedendo quindi induttivamente, se $d_k > 0$ per ogni k , si ha che la serie $\sum_k d_k$ è convergente, in particolare $d_k \rightarrow 0$. Per costruzione, per ogni k , si ha

$$C \subseteq \left(\bigcup_{i=0}^k [\gamma_i] \right)_{d_k} \subseteq \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} [\gamma_i] \right)_{d_k}$$

da cui

$$C \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} [\gamma_i] \right)_{d_k} = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} [\gamma_i]}.$$

Mostriamo che per ogni $r > 0$ e $x \in C \setminus \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$ tali che $\overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i] = \emptyset$

$$\mathcal{H}^1 \left(\overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} [\gamma_i] \right) \geq r.$$

Infatti, poiché $d_n \rightarrow 0$, $d(x, \bigcup_{i=k+1}^n [\gamma_i]) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi $x = \lim_{h \rightarrow +\infty} x_h$, per una certa successione $x_h \in [\gamma_{i(h)}]$, con $i(h) > k$ non decrescente. Definiamo

$$C_h := [\gamma_0] \cup \dots \cup [\gamma_{i(h)}]$$

e osserviamo che C_h è connesso e che, per ogni $r' < r$, contiene punti che non stanno in $B_{r'}(x_h)$. Quindi, dal Lemma 3.1, si ha che

$$\mathcal{H}^1(C_h \cap B_{r'}(x_h)) \geq r'.$$

Per h abbastanza grande, $B_{r'}(x_h) \subset B_r(x)$, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1 \left(\overline{B_r(x)} \cap \bigcup_{i=k+1}^{i(h)} [\gamma_i] \right) &= \mathcal{H}^1 \left(\overline{B_r(x)} \cap C_h \right) \geq \\ &\geq \mathcal{H}^1(C_h \cap B_{r'}(x_h)) \geq r'. \end{aligned}$$

Passando al limite per $r' \rightarrow r$ si ottiene la disuguaglianza richiesta, da cui segue che

$$\bar{\theta}_1(\mu, x) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in C \setminus \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i]$$

dove μ è la misura $\mu(B) := \mathcal{H}^1(B \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} [\gamma_i])$. Dal Teorema 2.27 si ottiene

$$\mathcal{H}^1 \left(\left(C \setminus \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i] \right) \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} [\gamma_i] \right) = \mathcal{H}^1 \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} [\gamma_i] \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^1 \left(C \setminus \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i] \right).$$

Allora

$$\mathcal{H}^1 \left(C \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} [\gamma_i] \right) \leq \mathcal{H}^1 \left(C \setminus \bigcup_{i=0}^k [\gamma_i] \right) \leq 2 \mathcal{H}^1 \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} [\gamma_i] \right)$$

e l'ultima quantità può essere arbitrariamente piccola se k è abbastanza grande. \square

Capitolo 3

Esistenza dei minimi

3.1 Unicità del minimo nel caso in cui Σ sia costituito da due punti

Entriamo adesso nello specifico del nostro problema andando a studiare il caso particolare in cui l'insieme Σ sia costituito da due soli punti.

Iniziamo con alcuni lemmi e concludiamo la sezione dimostrando che il minimo compatto connesso che contiene due punti è unico e coincide con il segmento che li congiunge.

Lemma 3.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^N$ connesso e $0 < r < \frac{\text{diam}(X)}{2}$, allora per ogni $x \in X$ $\mathcal{H}^1(X \cap B_r(x)) \geq r$.*

Dimostrazione. Siano $x \in X$ e $\varphi(y) := |x - y|$ con $y \in \mathbb{R}^N$. Allora $\varphi(x) = 0$ e, per la scelta di r , $X \cap \partial B_r(x) \neq \emptyset$, quindi $\varphi(X) \supseteq \{0, r\}$. Da cui segue che $\varphi(X)$, essendo connesso, contiene tutto il segmento $[0, r]$. Ora $\varphi(X \setminus B_r(x)) \subseteq [r, +\infty)$ e quindi $\varphi(X \cap B_r(x)) \supseteq [0, r]$. Da cui (l'altra inclusione è ovvia) $\varphi(X \cap B_r(x)) = [0, r]$ e, poiché φ è 1-lipschitziana, segue che

$$\mathcal{H}^1(X \cap B_r(x)) \geq \mathcal{H}^1(\varphi(X \cap B_r(x))) = \mathcal{H}^1([0, r]) = r.$$

□

Corollario 3.2. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^N$ connesso e $0 < r < \frac{\text{diam}(X)}{2}$, allora per ogni $x \in X$ $\mathcal{H}^1(X \setminus B_r(x)) \leq \mathcal{H}^1(X) - r$.*

Corollario 3.3. *Siano $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un minimo del Problema 1.1, $x \in K \setminus \Sigma$ e $r > 0$ tale che $2r < d(x, \Sigma)$, allora $K \setminus B_r(x)$ non è connesso.*

Lemma 3.4. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^N$ compatto e connesso per archi, B una palla aperta tale che $B \cap X \neq \emptyset$ e K una componente connessa per archi di $X \setminus B$, allora $K \cap \overline{B} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Siano $x_0 \in X \cap B$ e $x \in K$, allora, essendo X connesso per archi, esiste $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ curva continua che connette x con x_0 , ossia $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = x_0$. Allora, posto $\bar{t} := \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in \overline{B}\}$, $\gamma(\bar{t}) \in \overline{B}$ perché, per la continuità di γ , \bar{t} è un minimo. Inoltre $\gamma(\bar{t}) \in K$. Infatti, per ogni $t < \bar{t}$, l'immagine di $\gamma([0, t])$ sta in K in quanto è un connesso contenuto in $X \setminus B$ contenente $\gamma(0) \in K$. Allora, per ogni $t < \bar{t}$, $\gamma(t) \in K$. Da cui segue che $\gamma(\bar{t}) \in \overline{K} = K$. \square

Corollario 3.5. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^N$ compatto, connesso e tale che $\mathcal{H}^1(X) < +\infty$, B una palla aperta tale che $B \cap X \neq \emptyset$ e K una componente connessa di $X \setminus B$, allora $K \cap \overline{B} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Essendo K una componente connessa di $X \setminus B$, segue che $K \subseteq X \setminus B$ e di conseguenza $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$. Dal primo teorema di rettificabilità (Teorema 2.35) si ha quindi che sia X che K sono connessi per archi. Allora la tesi segue dal Lemma 3.4. \square

Teorema 3.6. *Dato $\Sigma = \{a, b\}$, sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ un connesso tale che $X \supseteq \Sigma$, allora $\mathcal{H}^1(X) \geq \mathcal{H}^1([a, b]) = |b - a|$.*

Dimostrazione. Sia π la proiezione ortogonale su R , retta passante per a e b , essendo π 1-lipschitziana, $\mathcal{H}^1(\pi(X)) \leq \mathcal{H}^1(X)$. Poiché $X \supseteq \Sigma$ e $\Sigma \subseteq R$, anche $\pi(X)$ contiene Σ e quindi, essendo connesso, contiene tutto il segmento $[a, b]$. Da cui

$$|a - b| = \mathcal{H}^1([a, b]) \leq \mathcal{H}^1(\pi(X)) \leq \mathcal{H}^1(X).$$

\square

Corollario 3.7. *Se X è un connesso con $\mathcal{H}^1(C) < +\infty$, allora C è limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che C non sia limitato, allora esistono due successioni contenute in C : $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ tali che $|x_n - y_n| \rightarrow +\infty$. Da cui

$$\mathcal{H}^1(C) \geq |x_n - y_n| \rightarrow +\infty$$

contro l'ipotesi. \square

Teorema 3.8. *Il problema 1.1 con $\Sigma = \{a, b\}$ ammette come unica soluzione il segmento $[a, b]$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 3.6 segue che il segmento $C = [a, b]$ è un minimo, facciamo vedere che tale minimo è unico. Supponiamo per assurdo che ci sia un altro minimo $K \neq C$, allora K contiene un punto x che non sta sul segmento e quindi esiste un $r > 0$ tale

che $B_r(x) \cap C = \emptyset$. Per il Corollario 3.3, riducendo r se necessario, $K \setminus B_r(x)$ è sconnesso in almeno due componenti connesse A e B con $A \ni a$, $B \ni b$ e nessuna delle due contiene Σ (se per assurdo $A \supseteq \Sigma$, allora $A \in T$ e $\mathcal{H}^1(A) < \mathcal{H}^1(K)$, contro il fatto che K è un minimo). Inoltre A e B toccano $\partial B_r(x)$ (Corollario 3.5) ciascuna in almeno un punto che chiamiamo rispettivamente a' e b' . Allora, per il Teorema 3.6, $\mathcal{H}^1(A) \geq |a - a'| \geq d(a, \partial B_r(x))$ e $\mathcal{H}^1(B) \geq |b - b'| \geq d(b, \partial B_r(x))$ da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(K) &\geq \mathcal{H}^1(A) + \mathcal{H}^1(B) \geq \\ &\geq d(a, \partial B_r(x)) + d(b, \partial B_r(x)) \rightarrow |a - x| + |b - x| > |a - b| \end{aligned}$$

ossia l'assurdo che $\mathcal{H}^1(K) > |a - b| = \mathcal{H}^1(C)$. \square

3.2 Teorema di Golab

Dimostriamo, in questo capitolo, il Teorema di Golab che fornisce l'inferiore semicontinuità per successioni della misura di Hausdorff unidimensionale e che serve subito dopo per dimostrare l'esistenza del minimo nel caso generico in cui l'insieme Σ sia un qualunque sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R}^N .

Iniziamo col richiamare la definizione di spazio topologico localmente connesso, in particolare mostriamo che ogni compatto connesso con misura di Hausdorff unidimensionale finita è localmente connesso.

Ciò ci permetterà di dire che le componenti connesse di un minimo e i minimi stessi sono connessi per archi. Ricordiamo infatti che se uno spazio topologico è connesso per archi allora è connesso e, poiché l'altra inclusione non sempre vale, in seguito useremo il fatto che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.

Definizione 3.9. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso (per archi)* in un punto $x \in X$ se ogni intorno di x contiene un intorno di x connesso (per archi). Uno spazio topologico si dice *localmente connesso (per archi)* se è tale in ogni suo punto.

Teorema 3.10. Sia K un compatto, connesso con $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$, allora K è localmente connesso.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto $x_0 \in K$ in cui K non sia localmente connesso, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ non contiene interni connessi di x_0 . Quindi $K \cap \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ non è connesso. Sia C_1 una componente connessa di $K \cap \overline{B_\varepsilon(x_0)}$

che non contiene x_0 e poniamo $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}d(C_1, x_0) > 0$. Allora $K \cap \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)}$ non è connesso. Siano quindi C'_2 una componente connessa di $K \cap \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)}$ che non contiene x_0 e C_2 la componente connessa di $K \cap \overline{B_{\varepsilon_1}(x_0)}$ che contiene C'_2 , allora $C_2 \cap C_1 = \emptyset$. Procedendo in questo modo, ponendo $\varepsilon_j = \frac{1}{2}d(C'_j, x_0) > 0$ e chiamando C'_{j+1} una componente connessa di $K \cap \overline{B_{\varepsilon_j}(x_0)}$ che non contiene x_0 , si ottiene una successione $\{C_j\}_j$ di componenti connesse di $K \cap \overline{B_{\varepsilon_j}(x_0)}$ ciascuna contenente C'_j e tale che $C_j \cap C_i = \emptyset$ per ogni $i = 1, \dots, j-1$. Dal Corollario 3.5, applicato con $B = (\overline{B_{\varepsilon}})^C$, segue che C'_j interseca $\partial B_{\varepsilon_j}(x_0)$ in a_j per ogni $j > 1$ e, posto b_j il punto di intersezione di C_j con $\partial B_{\varepsilon_1}(x_0)$, dal Teorema 3.6 applicato con $\Sigma = \{a_j, b_j\}$, segue che $\mathcal{H}^1(C_j) \geq \varepsilon - \varepsilon_1$ per ogni $j > 1$. Quindi

$$\mathcal{H}^1(K) \geq \sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{H}^1(C_j) = +\infty$$

che è contro le ipotesi. \square

Osservazione 3.11. Sia K localmente connesso e A un aperto, allora $K \cap A$ è localmente connesso.

Teorema 3.12. *Se uno spazio topologico X è localmente connesso, le sue componenti connesse sono aperte.*

Dimostrazione. Sia C una componente connessa di X e sia $x \in C$. Poiché X è localmente connesso, esiste un intorno U di x connesso. Essendo C il più grande connesso che contiene x , $U \subseteq C$. \square

Teorema 3.13 (di Golab). *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un compatto e $\{C_n\} \subseteq BC(E)$ una successione di compatti connessi che converge a C rispetto alla distanza di Hausdorff. Allora*

$$\mathcal{H}^1(C) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n).$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si può assumere che $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n)$ esista finito e che $\mathcal{H}^1(C_n) < L + 1$ per ogni n . Dal Lemma 2.3 segue che C è connesso e poiché $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (BC(E), h)$ con E compatto, per il Teorema di compattezza (Teorema 2.8) il limite C risulta anche compatto.

Sia $d_n := \text{diam}(C_n)$, per la continuità della funzione $\text{diam} : (BC(E), h) \rightarrow \mathbb{R}$, si ha $d_n \rightarrow d$ con $d := \text{diam}(C)$ che possiamo supporre positivo. Definiamo, per ogni insieme di Borel $B \subseteq \mathbb{R}^N$, le misure

$$\mu_n(B) := \mathcal{H}^1(B \cap C_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

e osserviamo che, poiché $\|\mu_n\| = \mu_n(\mathbb{R}^N) = \mathcal{H}^1(C_n) < L + 1$, ogni μ_n è una misura di Borel finita. Allora, a meno di sottosuccessione, si può assumere che $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ per una qualche misura di Borel μ . Questo implica che

$$\mu(F) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F), \quad \mu(G) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G)$$

dove F è un chiuso e G un aperto.

Siano ora $x \in C$ e $r' < r < \text{diam}(C)/2$, poiché $d_n \rightarrow d$, anche $r' < \text{diam}(C_n)/2$ se n è abbastanza grande. Posto $\varepsilon_n := h(C_n, C)$, esiste $y \in C_n$ tale che $|y - x| \leq \varepsilon_n$. Allora $\overline{B_{r'-\varepsilon_n}(y)} \subseteq \overline{B_{r'}(x)}$, da cui per il Lemma 3.1

$$\mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \geq \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'-\varepsilon_n}(y)}) \geq r' - \varepsilon_n.$$

Poiché $\varepsilon_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha

$$\begin{aligned} \mu(B_r(x)) &\geq \mu(\overline{B_{r'}(x)}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{B_{r'}(x)}) = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \geq r'. \end{aligned}$$

Essendo $r' < r$ è arbitrario, si ottiene che

$$\mu(B_r(x)) \geq r \quad \forall x \in C \quad \forall r < \text{diam}(C)/2$$

ossia $\overline{\theta}_1(\mu, x) \geq 1/2$. Dal Teorema 2.27 segue quindi che $\mu(C) \geq 1/2 \mathcal{H}^1(C)$, da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(C) &\leq 2\mu(C) \leq 2\mu(\mathbb{R}^N) \leq 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}^N) = \\ &= 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n) = 2L, \end{aligned}$$

in particolare $\mathcal{H}^1(C)$ è finito.

Per il secondo Teorema di rettificabilità (Teorema 2.37) \mathcal{H}^1 -q.o. $x_0 \in C$ è del tipo $x_0 = \gamma(t_0)$ dove γ è una curva lipschitziana, a valori in C , definita su un intervallo chiuso che contiene t_0 come punto interno. Per il Teorema di Rademacher (Teorema 2.29) γ è differenziabile in t_0 , ossia

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) - (t - t_0)\dot{\gamma}(t_0) = \omega(t) \quad \text{con } |\omega(t)| = o(t).$$

Per il Teorema di riparametrizzazione (Teorema 2.32) si può assumere che $|\dot{\gamma}(t_0)| = 1$ e senza perdita di generalità è possibile supporre che $\dot{\gamma}(t_0) = (1, 0, \dots, 0) := e_1$, $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$ e quindi dalla differenziabilità segue che $|\gamma(t) - te_1| = |\omega(t)| = o(t)$. Da cui, fissato

$\varepsilon < \varepsilon_0$, dove ε_0 è la costante del Lemma 3.14 dimostrato in seguito, si ha che

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ tale che } \forall t < \delta_0 \quad |\gamma(t) - te_1| = |\omega(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|.$$

Scelto quindi $r < \delta_0$, per ogni $t \in [-r, r]$, posto $x = (t, 0, \dots, 0) = te_1$ si ha $|\gamma(t) - te_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t| \leq \frac{\varepsilon}{2}r$. Poiché $h(C_n, C) \rightarrow 0$, esiste $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$, $h(C_n, C) \leq \frac{\varepsilon}{4}r$ ed esiste $y \in C_n$ tale che $|y - \gamma(t)| \leq h(C_n, C) + \frac{\varepsilon}{4}r \leq \frac{\varepsilon}{2}r$. Allora, per ogni $x \in I$, segmento di estremi $(-r, 0, \dots, 0)$ e $(r, 0, \dots, 0)$ in \mathbb{R}^n , esiste $y \in C_n$ per cui

$$|x - y| \leq |x - \gamma(t)| + |\gamma(t) - y| \leq \varepsilon r < \varepsilon_0 r$$

e quindi $d(x, C_n) \leq |x - y| < \varepsilon_0 r$. Inoltre, per ogni n , C_n è compatto, connesso e, poiché $\mathcal{H}^1(C_n) < +\infty$, per il Teorema 3.10, C_n è localmente connesso.

Abbiamo quindi mostrato che ogni C_n verifica le ipotesi del Lemma 3.14 in B_r qualunque sia $r < \delta_0$ e quindi $\mu_n(\overline{B_r}) = \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_r}) \geq (2 - \sqrt{\varepsilon})r$. Allora segue

$$\mu(\overline{B_r(x_0)}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{B_r(x_0)}) \geq (2 - \sqrt{\varepsilon})r$$

$$\overline{\theta}_1(\mu, x_0) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\overline{B_r(x_0)})}{2r} \geq 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Quindi $\overline{\theta}_1(\mu, x_0) \geq 1$ e, dal Teorema 2.27, segue che $\mathcal{H}^1(C) \leq \mu(C) \leq \mu(\mathbb{R}^N) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}^N) = L$. \square

Lemma 3.14. *Siano I il segmento di estremi $a := (-r, 0, \dots, 0)$ e $b := (r, 0, \dots, 0)$ in \mathbb{R}^N e $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < r\}$. Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$, si ha $\mathcal{H}^1(C \cap \overline{B_r}) \geq (2 - \sqrt{\varepsilon})r$, qualunque sia $C \subseteq \mathbb{R}^N$ compatto, connesso e localmente connesso tale che per ogni $x \in I$ $d(x, C) < \varepsilon r$.*

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $r = 1$. Consideriamo la proiezione ortogonale $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\pi(x_1, \dots, x_N) = x_1$ e lavoriamo sulle componenti connesse di $C \cap \overline{B}_1$.

Se una di queste: K , non tocca il bordo di \overline{B}_1 allora è l'unica componente di C .

Osserviamo infatti che, essendo $K \subset C \cap B_1$, K è anche componente connessa di $C \cap B_1$ che, per l'osservazione 3.11, è localmente connesso in quanto C è localmente connesso. Supponiamo per assurdo che K non sia l'unica componente di C . Allora $C = K \cup (C \cap K^C)$ è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti (K è aperto per il Teorema 3.12 e $C \cap K^C$ è aperto essendo K chiuso). Troviamo cioè l'assurdo che C sia sconnesso.

Quest'unica componente ha lunghezza maggiore o uguale di $2 - 2\varepsilon$. Per le ipotesi su C esistono infatti $z, y \in C$ tali che $z \in \overline{B_\varepsilon(a)}$ e $y \in \overline{B_\varepsilon(b)}$, allora, per il Teorema 3.6 ed essendo π 1-lipschitziana, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(C \cap \overline{B_1}) &= \mathcal{H}^1(C) \geq |z - y| \geq |\pi(z) - \pi(y)| = \\ &= |a - b| - |a - \pi(z)| - |b - \pi(y)| \geq 2 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Se invece ogni componente connessa di $C \cap \overline{B_1}$ tocca il bordo di $\overline{B_1}$, consideriamo C' l'unione di tutte le componenti connesse che hanno almeno un punto che dista meno di ε da I . Sia G una componente connessa di $\pi(C')$, allora G è un intervallo contenuto in $[-1, 1]$.

Mostriamo che se l'intervallo $G \subseteq I' := [-1 + 10\varepsilon, 1 - 10\varepsilon]$ allora $\mathcal{H}^1(\pi^{-1}(G) \cap C \cap \overline{B_1}) \geq \sqrt{20\varepsilon - (10\varepsilon)^2} - \varepsilon$. Per come abbiamo definito C' , esiste $x \in C' \cap \pi^{-1}(G)$ tale che $d(x, I) < \varepsilon$, questo punto ha proiezione $\pi(x) \in I'$ e quindi $|\pi(x)| \leq 1 - 10\varepsilon$. Scelto $z \in \pi^{-1}(G) \cap C \cap \partial B_1$, per il Teorema 3.6, $\mathcal{H}^1(\pi^{-1}(G) \cap C \cap \overline{B_1}) \geq |x - z|$. Con semplici considerazioni geometriche si vede che $|x - z|$ è minimo quando $|\pi(x)| = 1 - 10\varepsilon$ e $\pi(z) = \pi(x)$, allora dalla disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\pi^{-1}(G) \cap C \cap \overline{B_1}) &\geq |x - z| \geq \\ &\geq |\pi(x) - z| - |\pi(x) - x| \geq \sqrt{20\varepsilon - (10\varepsilon)^2} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Sia M il numero di componenti connesse G di $\pi(C')$ contenute in I' e supponiamo che $M > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - 11$, allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(C \cap \overline{B_1}) &\geq \sum_G \mathcal{H}^1(\pi^{-1}(G) \cap C \cap \overline{B_1}) \geq \\ &\geq M(\sqrt{20\varepsilon - (10\varepsilon)^2} - \varepsilon) > \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - 11 \right) (\sqrt{20\varepsilon - 100\varepsilon^2} - \varepsilon) = \\ &= (2 - 44\sqrt{\varepsilon}) \left(\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{25}{4}\varepsilon} - \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

e poiché, per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f(\varepsilon) := \frac{(2 - 44\sqrt{\varepsilon}) \left(\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{25}{4}\varepsilon} - \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon} \right)}{2 - \sqrt{\varepsilon}} \rightarrow \sqrt{\frac{5}{4}}$$

esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$, $f(\varepsilon) \geq 1$, cioè $\mathcal{H}^1(C \cap \overline{B_1}) \geq 2 - \sqrt{\varepsilon}$ e quindi il lemma è dimostrato.

Supponiamo ora che $M \leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - 11$. Se M sono le componenti connesse G di $\pi(C')$ contenute in I' , allora le componenti connesse

di $I' \setminus \pi(C')$ sono al più $M + 1$ e ognuna può essere lunga al massimo 2ε , altrimenti il centro della componente sarebbe distante più di ε da C , contro le ipotesi. Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(I - \pi(C')) &= \mathcal{H}^1(I - I') + \mathcal{H}^1(I' - \pi(C')) \leq \\ &\leq 20\varepsilon + 2\varepsilon(M + 1) = 2\varepsilon(M + 11) \leq 2\varepsilon \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) = \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Da cui segue che, essendo π 1-lipschitziana,

$$\mathcal{H}^1(C \cap \overline{B}_1) \geq \mathcal{H}^1(C') \geq \mathcal{H}^1(\pi(C')) \geq 2 - \sqrt{\varepsilon}.$$

□

3.3 Esistenza delle soluzioni

Dimostriamo l'esistenza del minimo nel caso generico in cui Σ sia un sottoinsieme qualunque non vuoto di \mathbb{R}^N . È una semplice applicazione del metodo diretto del calcolo delle variazioni, in cui sfruttiamo le proprietà della distanza di Hausdorff, viste nella sezione 2.1, e l'inferiore semicontinuità della misura di Hausdorff data dal Teorema di Golab.

Teorema 3.15. *Dato $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ e posto $T = \{X \subseteq \mathbb{R}^N \mid X \text{ chiuso, connesso, } X \supseteq \Sigma\}$ allora il problema $\min\{\mathcal{H}^1(X) \mid X \in T\}$ ha soluzione.*

Dimostrazione. Si usa il metodo diretto del calcolo delle variazioni. Possiamo supporre che esista $X \in T$ tale che $\mathcal{H}^1(X) < +\infty$, in caso contrario \mathbb{R}^N risulta essere sempre un minimo. Allora X è compatto e di conseguenza Σ è limitato. Segue inoltre che $I := \inf_{X \in T} \mathcal{H}^1(X) \in \mathbb{R}$. Consideriamo $\{X_k\}_k$ una successione minimizzante, ossia tale che ogni $X_k \in T$ e per cui $\mathcal{H}^1(X_k) \rightarrow I$ per $k \rightarrow +\infty$, e mostriamo che esiste un'estratta che converge rispetto alla distanza di Hausdorff a $X_0 \in T$. Poiché $I < +\infty$, si può supporre che $\mathcal{H}^1(X_k) \leq I + 1$ per ogni k . Scelto $x_0 \in \Sigma$ e posto $r_k := \frac{\text{diam}(X_k)}{4}$, se $r_k > 0$, si ottiene dal Lemma 3.1 che

$$I + 1 \geq \mathcal{H}^1(X_k \cap B_{r_k}(x_0)) \geq \frac{\text{diam}(X_k)}{4}$$

da cui segue che ogni $X_k \subseteq \overline{B_r(x_0)}$, con $r := 4(I + 1)$. Allora la successione $\{X_k\}_k \subseteq BC(\overline{B_r(x_0)})$, quindi, per il Teorema di compattezza (Teorema 2.8), a meno di estratta, converge, rispetto alla

distanza di Hausdorff, ad un certo $X_0 \in BC(\overline{B_r(x_0)})$. Dal Lemma 2.3 segue inoltre che X_0 è connesso e, poiché ogni X_k contiene Σ anche $X_0 \supseteq \Sigma$. In particolare $X_0 \in T$.

Il Teorema di Golab (Teorema 3.13) assicura infine l'inferiore semicontinuità per successioni di \mathcal{H}^1 . Da cui

$$\inf_{X \in T} \mathcal{H}^1(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(X_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(X_k) \geq \mathcal{H}^1(X_0)$$

e poiché $X_0 \in T$, X_0 è un minimo. \square

Nel seguito considereremo sempre Σ compatto in quanto se K è un minimo su Σ , è anche un minimo su $\bar{\Sigma}$ e, se $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$, allora Σ è limitato.

Capitolo 4

Regolarità del minimo

4.1 Caso in cui Σ sia finito

Mostriamo un risultato di regolarità del minimo nel caso in cui l'insieme Σ sia costituito da un numero finito di punti, dimostriamo cioè che un minimo è unione finita di segmenti con parte interna disgiunta e quindi in particolare è un grafo finito.

Iniziamo col far vedere che ogni minimo è unione di curve che si intersecano al più negli estremi. Nel seguito indicheremo con $|\Sigma|$ la cardinalità dell'insieme Σ .

Teorema 4.1. *Siano Σ un insieme di \mathbb{R}^N con $|\Sigma| < \infty$ e K un minimo chiuso connesso contenente Σ , allora K è unione finita di curve iniettive e lipschitziane che, a due a due, si intersecano al più negli estremi.*

Dimostrazione. Osserviamo che unendo tra loro tutti i punti di Σ si ottiene un compatto connesso contenente Σ che ha lunghezza finita, quindi ogni minimo K ha lunghezza finita e quindi, per il Corollario 3.7, è compatto. Sia $\Sigma = \{s_0, \dots, s_m\}$ e poniamo $K_0 := \{s_0\}$. Per il primo Teorema di rettificabilità (Teorema 2.35) esiste $\eta_1 : [0, 1] \rightarrow K$ curva iniettiva e lipschitziana che connette $s_1 = \eta_1(0)$ con $s_0 = \eta_1(1)$, poniamo $K_1 := K_0 \cup [\eta_1]$.

Per induzione prendiamo, per ogni $j = 2, \dots, m$, $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow K$ una curva iniettiva e lipschitziana che connette $s_j = \gamma_j(0)$ con $s_0 = \gamma_j(1)$ e definiamo

$$\eta_j := \gamma_j \Big|_{[0, \bar{t}_j]}$$

dove $\bar{t}_j = \inf\{t \in [0, 1] \text{ tale che } \gamma_j(t) \in K_{j-1}\}$. Osserviamo che \bar{t}_j è un minimo, sia infatti $\{t_i\}_i$ una successione minimizzante, ossia tale che $t_i \rightarrow \bar{t}_j$ e $\gamma_j(t_i) \in K_{j-1}$. Poiché γ_j è continua $\gamma_j(t_i) \rightarrow \gamma_j(\bar{t}_j)$ e, essendo K_{j-1} chiuso, segue che $\gamma_j(\bar{t}_j) \in K_{j-1}$. Definiamo ora

$K_j := K_{j-1} \cup [\eta_j]$ e mostriamo che $K_m = K$. Per costruzione si ha che

1. K_m è compatto in quanto unione finita di compatti
2. K_m è connesso perché unione di connessi non disgiunti
3. $K_m \supseteq \Sigma$

Supponiamo per assurdo che $K_m \neq K$, in particolare, poiché $K_m \subseteq K$, esiste $x \in K \setminus K_m$. Allora $r := d(x, K_m) > 0$ e quindi $K \cap B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq K \setminus K_m$, ma allora, dal Lemma 3.1, segue che

$$\mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1(K_m) = \mathcal{H}^1(K \setminus K_m) \geq \mathcal{H}^1(K \cap B_{\frac{r}{2}}(x)) \geq \frac{r}{2} > 0$$

ossia K_m è un compatto, connesso contenente Σ con $\mathcal{H}^1(K_m) < \mathcal{H}^1(K)$, contro l'ipotesi che K sia un minimo.

Con un cambio di variabile si può assumere che ogni η_i sia definita su $[0, 1]$. Siano $0 < t_1^i < \dots < t_{n_i}^i < 1$ tali che esiste un $k \in \{1, \dots, m\}$ per cui $\eta_i(t_j^i) = \eta_k(1)$. Posto $t_0^i = 0$ e $t_{n_i+1}^i = 1$, definiamo

$$\eta_i^j = \eta_i \Big|_{[t_j^i, t_{j+1}^i]} \quad \text{per } j = 0, \dots, n_i.$$

Quindi

$$K_m = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=0}^{n_i} [\eta_i^j].$$

□

Definizione 4.2. Essendo ogni minimo $K = \bigcup_{i=1}^h [\eta_i]$, un punto $x \in K \setminus \Sigma$ si dice un *punto di Steiner* se esistono $u, v \in \{1, \dots, h\}$, con $u \neq v$, e $t_u, t_v \in [0, 1]$ tali che $\eta_u(t_u) = \eta_v(t_v) = x$.

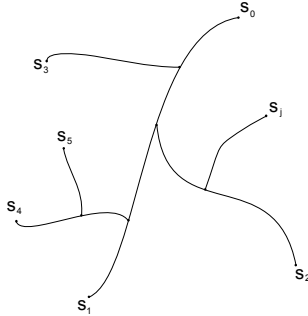


Figura 4: La costruzione usata nella dimostrazione del Teorema 4.1

Osserviamo che, poiché ogni volta che si aggiunge una nuova curva si crea al massimo un nuovo punto di Steiner, tali punti sono al più $|\Sigma| - 2$.

Mostriamo adesso che ciascuna curva del minimo è un segmento in quanto se così non fosse sostituendo ad essa il segmento avente come estremi gli estremi della curva otterrei un minimo “migliore” (Figura 5).

Teorema 4.3. *Sia Σ un insieme di \mathbb{R}^N con $|\Sigma| < \infty$, allora per ogni minimo K si ha che $K = \bigcup_{i=1}^h [\eta_i]$ dove ogni $[\eta_i]$ è il segmento avente come estremi gli estremi della curva stessa.*

Dimostrazione. Indichiamo, per ogni $i = 1, \dots, h$, con a_i e b_i gli estremi della curva η_i . Supponiamo per assurdo che esista un indice j tale che $[\eta_j] \neq [a_j, b_j]$, allora, per il Teorema 3.8, si ha che $\mathcal{H}^1([a_j, b_j]) < \mathcal{H}^1([\eta_j])$. Poniamo

$$\tilde{K} := \bigcup_{i=1, i \neq j}^h [\eta_i] \cup [a_j, b_j].$$

1. \tilde{K} è compatto in quanto unione finita di compatti
2. \tilde{K} è connesso in quanto unione di connessi non disgiunti
3. $\tilde{K} \supseteq \Sigma$

Allora, poiché vale anche che $\tilde{K} = (K \setminus [\eta_j]) \cup [a_j, b_j]$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\tilde{K}) &\leq \mathcal{H}^1(K \setminus [\eta_j]) + \mathcal{H}^1([a_j, b_j]) = \\ &= \mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1([\eta_j]) + \mathcal{H}^1([a_j, b_j]). \end{aligned}$$

Da cui

$$\mathcal{H}^1(\tilde{K}) - \mathcal{H}^1(K) \leq \mathcal{H}^1([a_j, b_j]) - \mathcal{H}^1([\eta_j]) < 0$$

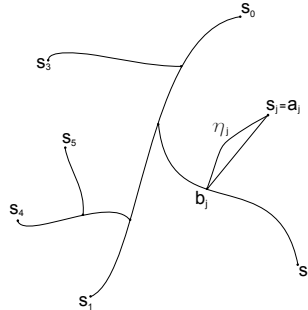


Figura 5: La costruzione utilizzata nella dimostrazione del Teorema 4.3.

contro il fatto che K è un minimo. □

Abbiamo quindi dimostrato che ogni minimo è unione finita di segmenti con parte interna disgiunta, quindi in particolare è un grafo finito. Più precisamente, in base alla costruzione fatta, dove ogni nuova curva interseca le precedenti in un solo punto, si può osservare che tale grafo è un albero.

4.2 Caso in cui Σ sia compatto e numerabile

Un risultato di regolarità analogo a quello visto nel caso finito si ottiene anche se Σ è un compatto numerabile.

Iniziamo col definire le componenti di un minimo e col mostrare che ognuna è a sua volta un minimo su un opportuno sottoinsieme di Σ . Ciò permetterà di lavorare su ciascuna di esse continuando a sfruttare tutte le proprietà del minimo (Figura 6).

Definizione 4.4. Siano Σ un compatto e K un compatto, connesso contenente Σ . Se C è una componente connessa di $K \setminus \Sigma$, diciamo che \bar{C} è una *componente di K* .

Teorema 4.5. Dato Σ un compatto di \mathbb{R}^N , se K è un minimo compatto connesso contenente Σ con $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$, ogni sua componente \bar{C} è un minimo su $\Sigma' := \Sigma \cap \bar{C}$.

Dimostrazione. Mostriamo che $\bar{C} = C \cup \Sigma'$. Sia infatti $\{x_k\}_k \subseteq C \cup \Sigma$ con $x_k \rightarrow x$. Allora, poiché K è chiuso ed è l'unione di Σ con le componenti, $x \in \Sigma$ o sta in una qualche componente connessa C_0 che non può essere diversa da C . Se lo fosse, K non sarebbe localmente connesso in quanto per ogni $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap K$ intersecherebbe due diverse componenti connesse di $K \setminus \Sigma$ e quindi sarebbe sconnesso,

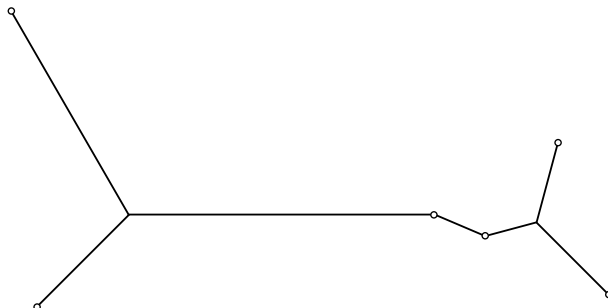


Figura 6: Un esempio di minimo K tale che $K \setminus \Sigma$ ha tre componenti.

ma questo è contro quanto affermato dal Teorema 3.10. Allora $x \in \Sigma \cup C$, ossia $\Sigma \cup C$ è chiuso. Quindi $\overline{C} \subseteq C \cup \Sigma$ e dalla definizione di Σ' segue l'uguaglianza. Osserviamo anche che, poiché C è aperto in $K \setminus \Sigma$ (Teorema 3.12) e quindi in K , si ha che

$$\partial^K C := \overline{C}^K \cap \overline{C^c}^K = \overline{C} \setminus (\overset{\circ}{C})^K = \overline{C} \setminus C = (C \cup \Sigma') \setminus C = \Sigma'$$

essendo $C \cap \Sigma' = \emptyset$.

Supponiamo ora, per assurdo, che \overline{C} non sia un minimo su Σ' e sia invece H il minimo. Allora $\mathcal{H}^1(H) < \mathcal{H}^1(\overline{C})$. Osserviamo che $K \setminus C$ è compatto essendo C aperto in K . Posto $\tilde{K} := (K \setminus C) \cup H$, allora

1. \tilde{K} è compatto in quanto unione di due compatti.
2. \tilde{K} è connesso in quanto connesso per archi. Siano infatti $x, y \in \tilde{K}$ e mostriamo che esiste una curva φ contenuta in \tilde{K} che connette $x := \varphi(0)$ con $y := \varphi(1)$.

Distinguiamo in casi e iniziamo con l'osservare che la tesi è ovvia nel caso in cui entrambi i punti stiano in H in quanto H è connesso per archi per il primo Teorema di rettificabilità (Teorema 2.35).

Supponiamo ora che solo uno dei due punti, diciamo y , stia in H . Consideriamo allora un punto $z \in \Sigma' \cap L$ dove L è la componente connessa di $K \setminus C$ che contiene x ($K \setminus C$ non è connesso, altrimenti sarebbe lui un minimo e non K). Poiché $x, z \in L$, connesso per archi per il Teorema 2.35, esiste una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow L \subseteq K \setminus C$ che li connette. Inoltre, valendo anche che $z, y \in H$ esiste un'altra curva $\psi : [0, 1] \rightarrow H$ che li connette. Consideriamo allora come curva φ quella ottenuta dalla concatenazione delle curve γ e ψ che sta in \tilde{K} per costruzione.

Supponiamo infine che $x, y \notin H$. Allora sono entrambi punti di K , connesso per archi. Esiste quindi una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$ che connette $x := \gamma(0)$ con $y := \gamma(1)$. Siano $\bar{t}_1 := \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in C\}$ e $\bar{t}_2 := \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in C\}$, allora $\gamma(\bar{t}_1), \gamma(\bar{t}_2) \in \overline{C}$. Ora, poiché esiste una successione $\{t_h\}_h \in [0, \bar{t}_1]$ che converge a \bar{t}_1 e per cui $\gamma(t_h) \in C^c$ per ogni h , segue che $\gamma(\bar{t}_1) \in \overline{C^c}$. Analogamente anche $\gamma(\bar{t}_2) \in \overline{C^c}$, quindi $\gamma(\bar{t}_1), \gamma(\bar{t}_2) \in \overline{C} \cap \overline{C^c} = \partial^K C = \Sigma'$. Consideriamo allora come curva φ quella ottenuta rimpiazzando $\gamma|_{[\bar{t}_1, \bar{t}_2]}$ con una curva contenuta in H che connette $\gamma(\bar{t}_1)$ con $\gamma(\bar{t}_2)$. Per costruzione, $[\varphi] \subseteq \tilde{K}$.

3. $\tilde{K} \supseteq \Sigma$.

Poiché $\bar{C} = C \cup \Sigma'$ e $\Sigma' \subseteq H$, vale anche $\tilde{K} = (K \setminus \bar{C}) \cup H$, ma allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\tilde{K}) &\leq \mathcal{H}^1(K \setminus \bar{C}) + \mathcal{H}^1(H) = \\ &= \mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1(\bar{C}) + \mathcal{H}^1(H) < \mathcal{H}^1(K) \end{aligned}$$

contro il fatto che K è minimo. \square

Allora, per mostrare la regolarità di ogni singola componente di un minimo K , possiamo supporre che esso sia costituito da un'unica componente.

Teorema 4.6. *Siano Σ un insieme compatto e numerabile di \mathbb{R}^N e K un minimo compatto connesso con $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ contenente Σ e con una sola componente, allora $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$, dove i segmenti $[a_i, b_i]$ hanno parte interna disgiunta.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per vari lemmi.

Lemma 4.7. *K è unione numerabile di curve iniettive e lipschitziane.*

Dimostrazione. Siano $\Sigma = \{s_i\}_{i=1}^{+\infty}$ e $x_0 \in K \setminus \Sigma$. Per il primo Teorema di rettificabilità (Teorema 2.35) esiste $\eta_1 : [0, 1] \rightarrow K$ curva iniettiva e lipschitziana che connette $s_1 = \eta_1(0)$ con $x_0 = \eta_1(1)$, poniamo $K_1 := [\eta_1]$.

Per induzione prendiamo, per ogni $j \geq 2$, $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow K$ una curva iniettiva e lipschitziana che connette $s_j = \gamma_j(0)$ con $x_0 = \gamma_j(1)$ e definiamo

$$\eta_j := \gamma_j \Big|_{[0, \bar{t}_j]}$$

dove $\bar{t}_j = \inf\{t \in [0, 1] \text{ tale che } \gamma_j(t) \in K_{j-1}\}$. Osserviamo che \bar{t}_j è un minimo e quindi $\gamma_j(\bar{t}_j) \in K_{j-1}$. Definiamo ora $K_j := K_{j-1} \cup [\eta_j]$, $\tilde{K} := \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$ e mostriamo che $\tilde{K} = K$. Per costruzione si ha che

1. \tilde{K} è connesso perché unione di connessi non disgiunti
2. $\tilde{K} \supseteq \Sigma$
3. \tilde{K} è compatto perché è limitato (per il Corollario 3.7 in quanto, essendo $\tilde{K} \subseteq K$, $\mathcal{H}^1(\tilde{K}) \leq \mathcal{H}^1(K) < +\infty$) e chiuso. Sia infatti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{K}$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Se esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $[\eta_{j_0}]$ contiene infiniti indici della successione, allora, poiché $[\eta_{j_0}]$ è chiuso, $\bar{x} \in [\eta_{j_0}] \subseteq \tilde{K}$. Posso quindi supporre che esista una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_j$ tale che $x_{n_j} \in [\eta_{n_j}]$ per ogni j . Ora,

poiché le curve si intersecano al più in una quantità numerabile di punti,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathcal{H}^1([\eta_{n_j}]) = \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} [\eta_{n_j}]\right) \leq \mathcal{H}^1(K) < +\infty$$

e quindi $\mathcal{H}^1([\eta_{n_j}]) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$. Per come abbiamo definito le curve di \tilde{K} , per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste $s_{n_j} \in \Sigma \cap [\eta_{n_j}]$ e poiché $|x_{n_j} - s_{n_j}| \leq \mathcal{H}^1([\eta_{n_j}]) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$, si ha che $s_{n_j} \rightarrow \bar{x}$ in quanto

$$|s_{n_j} - \bar{x}| \leq |s_{n_j} - x_{n_j}| + |x_{n_j} - \bar{x}| \rightarrow 0$$

per $j \rightarrow +\infty$. Allora, essendo $\{s_{n_j}\}_j \subseteq \Sigma$ chiuso, segue che $\bar{x} \in \Sigma \subseteq \tilde{K}$.

Supponiamo per assurdo che $\tilde{K} \neq K$, in particolare, poiché $\tilde{K} \subseteq K$, esiste $x \in K \setminus \tilde{K}$. Allora $r := d(x, \tilde{K}) > 0$ e quindi $K \cap B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq K \setminus \tilde{K}$, ma allora, dal Lemma 3.1, segue che

$$\mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1(\tilde{K}) = \mathcal{H}^1(K \setminus \tilde{K}) \geq \mathcal{H}^1(K \cap B_{\frac{r}{2}}(x)) \geq \frac{r}{2} > 0$$

ossia \tilde{K} è un compatto, connesso contenente Σ con $\mathcal{H}^1(\tilde{K}) < \mathcal{H}^1(K)$, contro l'ipotesi che K sia un minimo. Quindi $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\eta_i]$ e con un cambio di variabile si può assumere che ogni η_i sia definita su $[0, 1]$. \square

Definizione 4.8. Diciamo che una curva $\eta : [0, 1] \rightarrow K$ si attacca al minimo K nel punto x se $\eta(1) = x$.

Definizione 4.9. Dato un punto $x \in K$, se $x \in [\eta_1]$ diciamo che x è un punto di livello 0, mentre x è un punto di livello $k+1$ se $x \in [\eta_j]$ con η_j curva che si attacca a un punto di livello k .

Definizione 4.10. Data una curva $\eta : [0, 1] \rightarrow K$, poniamo $(\eta_i) := \eta_i((0, 1))$ e $(\eta_i] := \eta_i((0, 1])$.

Lemma 4.11. $K \setminus \Sigma$ è connesso per archi.

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare che $K \setminus \Sigma$ è localmente connesso per archi. Dato $x \in K \setminus \Sigma$, sia W un intorno di x in $K \setminus \Sigma$. Allora esiste $\rho > 0$ tale che $B_{2\rho}(x) \cap K \subseteq W$. Essendo K localmente connesso (Teorema 3.10), esiste U intorno connesso di x tale che $U \subseteq B_\rho(x) \cap K$. Quindi \bar{U} è un connesso, compatto tale che $\bar{U} \subseteq \overline{B_\rho(x)} \cap K \subseteq B_{2\rho}(x) \cap K \subseteq W$. Dal primo Teorema di rettificabilità (Teorema 2.35), segue che \bar{U} è connesso per archi, quindi

$K \setminus \Sigma$ è localmente connesso per archi, che insieme alla connessione, ci dice che è connesso per archi. \square

Lemma 4.12. *Per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $(\eta_i] \cap \Sigma = \emptyset$, in particolare vale che $[\eta_i] \cap \Sigma = \{\eta_i(0)\}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $i \in \mathbb{N}$ tale che $\Sigma \cap (\eta_i] \neq \emptyset$ e sia s un punto contenuto nell'intersezione. Se $s \in (\eta_i)$ consideriamo $x, y \in (\eta_i) \setminus \Sigma$ due punti presi da parti opposte rispetto a s , ossia se $x = \eta_i(t_x)$, $y = \eta_i(t_y)$, $s = \eta_i(t_s)$ allora $0 < t_x < t_s < t_y < 1$. Se invece $s = \eta_i(1)$ consideriamo $x \in (\eta_i) \setminus \Sigma$ e $y \in K \setminus \Sigma$ un punto di livello minore. Osserviamo che se $i = 1$, un tale punto non esiste, ma, la costruzione fatta ci assicura che in questo caso $s \in (\eta_1)$ in quanto $\eta_1(1) = x_0 \notin \Sigma$.

Essendo $K \setminus \Sigma$ connesso per archi, esiste una curva γ , che posso supporre iniettiva, definita in $[0, 1]$ con $[\gamma] \subseteq K \setminus \Sigma$ che connette $x := \gamma(0)$ con $y := \gamma(1)$. Sia

$$J = \{j \in \mathbb{N} \mid (\eta_j) \cap [\gamma] \neq \emptyset\}.$$

Supponiamo che $|J| = \infty$, allora per ogni $j \in J$ esiste $s_j \in \Sigma \cap [\eta_j]$, $x_j \in [\gamma] \cap (\eta_j)$ ed un'estratta $\{x_{j_h}\}_{h \in \mathbb{N}}$ che converge ad un punto $\bar{x} \in [\gamma]$. Poiché $|x_{j_h} - s_{j_h}| \leq \mathcal{H}^1([\eta_{j_h}]) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$, $s_{j_h} \rightarrow \bar{x}$ in quanto

$$|s_{j_h} - \bar{x}| \leq |s_{j_h} - x_{j_h}| + |x_{j_h} - \bar{x}| \rightarrow 0$$

per $h \rightarrow +\infty$ e, essendo Σ chiuso, $\bar{x} \in \Sigma$. Quindi si ha l'assurdo che $\bar{x} \in [\gamma] \cap \Sigma$.

Allora $|J| < \infty$. Ora la curva γ , essendo contenuta in $K \setminus \Sigma$, per andare in y partendo da x , non può rimanere in $[\eta_i]$ perché altrimenti dovrebbe intersecare il punto $s \in \Sigma$. Deve quindi passare ad un'altra curva che si attacca ad $[\eta_i]$, deve cioè aumentare di livello (non può diminuirlo perché altrimenti dovrebbe arrivare a $\eta_i(1)$ intersecando quindi s).

Posti l il livello di η_i e $i_0 := i$, sia i_1 tale per cui γ entra in (η_{i_1}) di livello pari a $l + 1$. La curva γ , in quanto iniettiva non può tornare di nuovo in $\eta_{i_1}(1)$ e neanche arrivare in $\eta_{i_1}(0)$, essendo esso un punto di Σ . Ne segue che γ entra in (η_{i_2}) curva di livello $l + 2, \dots$

In questo modo però γ non arriverà mai in y che è un punto di livello non superiore ad x . \square

Lemma 4.13. *Dato $y \in K \setminus \Sigma$ le curve che si attaccano in y sono in numero finito.*

Dimostrazione. Sia $y \in K \setminus \Sigma$ e supponiamo che ci siano infinite curve $\{\eta_j\}_j$ che si attaccano in y . Allora, per come abbiamo definito K , per ogni j esiste $s_j \in [\eta_j] \cap \Sigma$, tale che $s_j \rightarrow y$, in quanto

$$|y - s_j| \leq \mathcal{H}^1([\eta_j]) \rightarrow 0$$

per $j \rightarrow +\infty$; ma, essendo la successione $\{s_j\}_j \subseteq \Sigma$ chiuso, ne segue l'assurdo che $y \in \Sigma$. \square

Lemma 4.14. $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\eta_i]$ con η_i curve che, a due a due, si intersecano al più negli estremi.

Dimostrazione. Abbiamo visto che

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\eta_i]$$

con $\eta_i : [0, 1] \rightarrow K$ che unisce $s_i = \eta_i(0)$ con un punto di $K_{i-1} = \bigcup_{l < i} [\eta_l]$. Tutti i punti di (η_i) che sono in comune con punti di altre curve sono, per costruzione, punti del tipo $\eta_j(1)$ con $j > i$, consideriamo quindi

$$J := \{j \in \mathbb{N} \mid \eta_j(1) \in (\eta_i)\}$$

e poniamo $n_i := |J|$.

Se $n_i < \infty$ siano $0 < t_1^i < \dots < t_{n_i}^i < 1$ tali che esiste un $j \in J$ per cui $\eta_i(t_h^i) = \eta_j(1)$. Posto $t_0^i = 0$ e $t_{n_i+1}^i = 1$, definiamo

$$\eta_i^h := \eta_i \Big|_{[t_h^i, t_{h+1}^i]} \quad \text{per } h = 0, \dots, n_i.$$

Supponiamo ora che $n_i = \infty$ e mostriamo che $\{\eta_j(1)\}_{j \in J}$ converge ad s_i . Sia $\{\eta_{j_h}(1)\}_h$ un'estratta convergente a un punto $x \in [\eta_i]$. In modo analogo a quanto visto sopra, poiché $\mathcal{H}^1([\eta_k]) \rightarrow 0$, si ha che x è un punto di Σ e poiché $[\eta_i] \cap \Sigma = \{\eta_i(0)\}$, non possono esserci due estratte convergenti a due punti diversi. Quindi la successione $\{\eta_j(1)\}_{j=i}^{+\infty}$ converge ad s_i .

Sia $T := \{t_j \in [0, 1] \mid j \in J \text{ e } \eta_j(1) = \eta_i(t_j)\}$, allora T , per il Lemma 4.13, ha infiniti punti e ha solo 0 come punto di accumulazione. Se infatti ci fosse un altro punto di accumulazione $\tilde{t} \neq 0$ a cui converge una sottosuccessione $\{t_{j_h}\}_h$, si avrebbe $\eta_{j_h}(1) = \eta_i(t_{j_h}) \rightarrow \eta_i(\tilde{t}) \neq \eta_i(0)$ per l'iniettività di η_i , ma abbiamo detto che $\eta_j(1) \rightarrow \eta_i(0)$. Inoltre T ammette massimo: t_1 in quanto se $\sup T > 0$ non fosse un massimo esisterebbe una successione che vi tende e quindi sarebbe un altro punto di accumulazione oltre allo 0. In modo analogo $T_1 := T \setminus \{t_1\}$ ha infiniti punti, ha solo 0

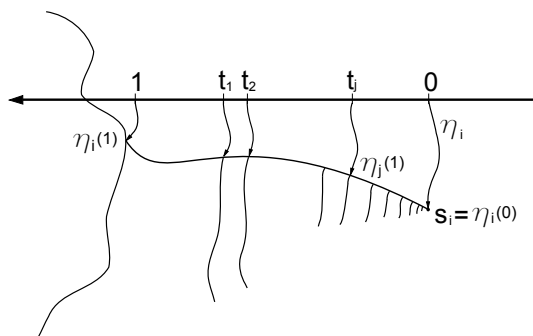


Figura 7: L'insieme T definito nella dimostrazione del Lemma 4.14.

come punto di accumulazione e ammette massimo: t_2 . Proseguendo per induzione troviamo una successione $\{t_k\}_k$ convergente a 0 e possiamo quindi definire

$$\begin{aligned} \eta_i^0 &= \eta_i|_{[t_1, 1]} \\ &\dots \\ \eta_i^h &= \eta_i|_{[t_{h+1}, t_h]} \\ &\dots \end{aligned}$$

Allora

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{h=0}^{n_i} [\eta_i^h],$$

e, rinominando le curve, si ottiene la tesi. \square

Siamo ora in grado di concludere la dimostrazione del Teorema 4.6, facendo vedere che ognuna di queste curve che a due a due si intersecano al più negli estremi, è il segmento che ha per estremi gli estremi della curva stessa.

Indichiamo, per ogni $i \in \mathbb{N}$, con a_i e b_i gli estremi della curva η_i . Supponiamo per assurdo che esista un indice j tale che $[\eta_j] \neq [a_j, b_j]$, allora, per il Teorema 3.6, si ha che $\mathcal{H}^1([a_j, b_j]) < \mathcal{H}^1([\eta_j])$. Poniamo

$$\tilde{K} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i \neq j} [\eta_i] \cup [a_j, b_j].$$

Allora

1. \tilde{K} è connesso in quanto unione di connessi non disgiunti,
2. $\tilde{K} \supseteq \Sigma$,
3. \tilde{K} è compatto in quanto vale anche che $\tilde{K} = (K \setminus (\eta_j)) \cup [a_j, b_j]$.

Segue quindi che

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\tilde{K}) &\leq \mathcal{H}^1(K \setminus (\eta_j)) + \mathcal{H}^1([a_j, b_j]) = \\ &= \mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1([\eta_j]) + \mathcal{H}^1([a_j, b_j]).\end{aligned}$$

Da cui

$$\mathcal{H}^1(\tilde{K}) - \mathcal{H}^1(K) \leq \mathcal{H}^1([a_j, b_j]) - \mathcal{H}^1([\eta_j]) < 0$$

contro il fatto che K è un minimo. □

Definizione 4.15. Dato $x \in K \setminus \Sigma$, diciamo che è un *punto di Steiner* se esistono due segmenti diversi di K che hanno un estremo in x .

Teorema 4.16. Siano Σ un insieme compatto e numerabile di \mathbb{R}^N e K un minimo compatto connesso contenente Σ con $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$. Se indichiamo con C_i le componenti connesse di $K \setminus \Sigma$ ossia tali che

$$K \setminus \Sigma = \bigcup_{i \in I} C_i$$

allora queste sono una quantità numerabile.

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare che $\mathcal{H}^1(C_i) > 0$ per ogni i . Supponiamo per assurdo che esista un indice $i \in I$ tale che $\mathcal{H}^1(C_i) = 0$, allora, poiché C_i è una componente connessa, $C_i = \{x\}$. Essendo $K \setminus \Sigma$ localmente connesso, sappiamo anche, dal Teorema 3.12, che ogni componente connessa è aperta in $K \setminus \Sigma$. In particolare il punto x è aperto in $K \setminus \Sigma$, ossia esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap K \setminus \Sigma = \{x\}$. Allora dal Lemma 3.1, si arriva al seguente assurdo

$$0 < \varepsilon \leq \mathcal{H}^1(K \cap B_\varepsilon(x)) \leq \mathcal{H}^1(K \setminus \Sigma \cap B_\varepsilon(x)) + \mathcal{H}^1(\Sigma) = 0.$$

Per quanto appena visto, posto

$$I_n := \left\{ i \in I \mid \mathcal{H}^1(C_i) > \frac{1}{n} \right\},$$

segue che

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_n = I.$$

Ora, se l'insieme degli indici I fosse più che numerabile, esisterebbe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|I_{\bar{n}}| = \infty$, ma allora

$$\sum_{i \in I_{\bar{n}}} \mathcal{H}^1(C_i) > \sum_{i \in I_{\bar{n}}} \frac{1}{\bar{n}} = +\infty$$

che è in contraddizione col fatto che

$$\sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(C_i) = \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) \leq \mathcal{H}^1(K) < +\infty.$$

□

Teorema 4.17. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, mostriamo che*

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{C_i}.$$

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che $K = \overline{K \setminus \Sigma}$. Poiché K è un chiuso contenente $K \setminus \Sigma$, si ha che $K \supseteq \overline{K \setminus \Sigma}$. Supponiamo ora per assurdo che l'altra inclusione non valga, esiste allora $x \in K \setminus (\overline{K \setminus \Sigma})$. Posto $r := d(x, \overline{K \setminus \Sigma}) > 0$, segue che

$$B_{\frac{r}{2}}(x) \cap K \subseteq K \setminus (\overline{K \setminus \Sigma}) \subseteq K \setminus (K \setminus \Sigma) = \Sigma.$$

Ne segue allora che, essendo Σ numerabile, anche la cardinalità di $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap K$ è al più numerabile e quindi $\mathcal{H}^1(B_{\frac{r}{2}}(x) \cap K) = 0$ contro quanto affermato dal Lemma 3.1. Allora

$$K = \overline{K \setminus \Sigma} = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{C_i}.$$

□

Si è quindi visto che ogni minimo K è uguale alla chiusura delle componenti, non è infatti possibile dire di più. Prendiamo, ad esempio, $\Sigma = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Allora il segmento $[0, 1]$ è un minimo, ma nessuna sua componente $\overline{C_i}$ contiene il punto 0.

Comunque, visto che ogni componente di K è unione di segmenti con parte interna disgiunta, si ha che

$$K = K \setminus \Sigma \cup \Sigma = \bigcup_i C_i \cup \Sigma \subseteq \bigcup_i \overline{C_i} \cup \Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i] \cup \Sigma.$$

Quindi, nel caso in cui Σ sia un compatto numerabile, un minimo compatto connesso contenente Σ con misura di Hausdorff unidimensionale finita è unione di segmenti con parte interna disgiunta a cui eventualmente mancano alcuni punti di Σ .

È noto, in seguito agli studi fatti sul Problema di Steiner, che ogni punto di Steiner è “triplo” ossia ci sono esattamente tre segmenti

che hanno un estremo in tale punto e questi formano tra loro angoli di 120° .

L'idea di ciò è che, presi due versori centrati in un punto di Steiner, si verifica facilmente che questi non possono formare un angolo più piccolo di 120° , perché altrimenti otterrei un minimo “migliore” se passassi per un punto preso all'interno dell'angolo (Figura 8). Quindi, una volta fissato un versore, gli altri devono stare all'interno del cono costituito dai versori che formano un angolo maggiore o uguale di 120° col versore assegnato e, a loro volta, devono formare reciprocamente angoli non inferiori a 120° . Allora l'unica possibilità è che ci siano esattamente tre versori, che formano tra loro angoli di 120° .

Conseguenza di ciò è che la somma i versori centrati nei punti di Steiner di un minimo è zero, risultato che si deduce anche dalla nostra costruzione.

Teorema 4.18. *La somma dei versori nei punti di Steiner di un minimo K è 0.*

Dimostrazione. Sia y un punto di Steiner in K . Senza perdita di generalità possiamo supporre $y = 0$. Indichiamo con v_1, \dots, v_h i versori (finiti per il Lemma 4.13) individuati da $B_1(y) \cap K$ e definiamo

$$l(x) := \sum_{k=1}^h |v_k - x|.$$

Essendo K un minimo, 0 è un punto di minimo per $l(x)$ e quindi $\nabla l(0) = 0$ e poiché

$$\frac{\partial l}{\partial x_j}(x) = - \sum_{k=1}^h \frac{(v_k)_j - x_j}{|v_k - x|}$$

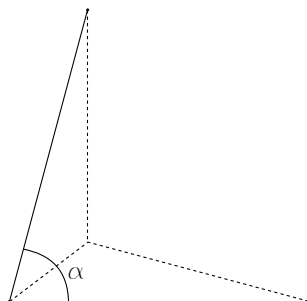


Figura 8: Gli angoli α tra due versori centrati nei punti di Steiner non possono essere minori di 120° .

per ogni $j = 1, \dots, N$, deve essere $\frac{\partial l}{\partial x_j}(0) = 0$, ossia

$$\sum_{k=1}^h \frac{(v_k)^j}{|v_k|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^h v_k = 0.$$

□

Capitolo 5

Formulazione più generale del problema

Proponiamo ora una formulazione più generale del problema che ci permetterà di avere due estensioni.

La prima è la possibilità di considerare anche “il problema con ostacoli”, ossia il problema nelle ipotesi più generali in cui il minimo sia vincolato ad appartenere ad un sottoinsieme E di \mathbb{R}^N , a causa della presenza di uno o più ostacoli.

La seconda è la possibilità di considerare insiemi Σ di misura \mathcal{H}^1 infinita. A differenza dei due casi visti nei precedenti capitoli, in cui Σ era unione di punti, adesso andremo a considerare non più un minimo che contenga il nostro insieme (anche perché un tale minimo può non essere unione di segmenti), ma più semplicemente un minimo che “connetta” Σ .

La nuova formulazione è la seguente:

Problema 5.1. *Dati $E \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso e connesso, $\emptyset \neq \Sigma \subseteq E$ compatto, posto $T = \{X \subseteq E \mid X \text{ e } X \cup \Sigma \text{ chiuso e connesso}\}$, trovare il $\min\{\mathcal{H}^1(X) \mid X \in T\}$.*

Consideriamo un esempio concreto di “problema con ostacolo”. Supponiamo di dover connettere delle abitazioni di montagna con un fiume da cui attingere acqua e di non poter attraversare un bosco limitrofo che rappresenta quindi un ostacolo. Il minimo andrà di conseguenza cercato non in tutto lo spazio, ma in un suo sottoinsieme (Figura 9).

Iniziamo con un risultato di esistenza che è un semplice adattamento del Teorema 3.15.

Teorema 5.2. *Il problema 5.1 ha soluzione.*

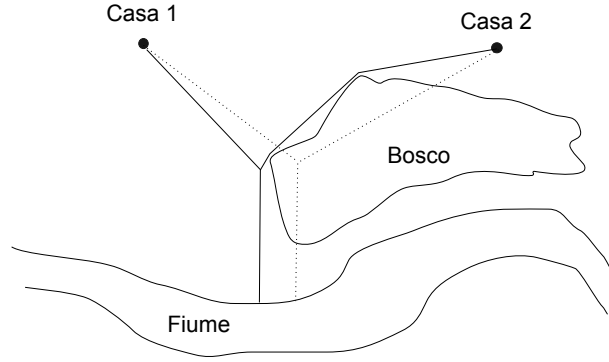


Figura 9: Un esempio di minimo con ostacolo.

Dimostrazione. Si usa il metodo diretto del calcolo delle variazioni. Possiamo supporre che esista $X \in T$ tale che $\mathcal{H}^1(X) < +\infty$ perché, in caso contrario, E risulta essere sempre un minimo. Allora X è compatto e $I := \inf_{X \in T} \mathcal{H}^1(X) \in \mathbb{R}$. Consideriamo $\{X_k\}_k$ una successione minimizzante, ossia tale che ogni $X_k \in T$ e tale che $\mathcal{H}^1(X_k) \rightarrow I$, e mostriamo che esiste un'estratta che converge rispetto alla distanza di Hausdorff a $X_0 \in T$. Poiché $I < +\infty$, si può supporre che $\mathcal{H}^1(X_k) \leq I + 1$ per ogni k . Scelto $x_0 \in \Sigma$ e posto $r_k := \frac{\text{diam}(X_k)}{4}$, se $r_k > 0$, si ottiene dal Lemma 3.1 che

$$I + 1 \geq \mathcal{H}^1(X_k \cap B_{r_k}(x_0)) \geq \frac{\text{diam}(X_k)}{4}$$

da cui segue che ogni $X_k \subseteq \overline{B_r(x_0)}$, con $r := 4(I + 1)$. Allora la successione $\{X_k\}_k \subseteq BC(\overline{B_r(x_0)})$, quindi, per il Teorema di compattezza (Teorema 2.8), a meno di estratta, converge, rispetto alla distanza di Hausdorff, ad un certo $X_0 \in BC(\overline{B_r(x_0)})$. Poiché

$$h(X_k \cup \Sigma, X_0 \cup \Sigma) \leq \max\{h(X_k, X_0), h(\Sigma, \Sigma)\} = h(X_k, X_0) \rightarrow 0$$

dal Lemma 2.3 segue che X_0 e $X_0 \cup \Sigma$ sono entrambi connessi. Inoltre essendo ogni $X_k \subseteq E$ chiuso, anche $X_0 \subseteq E$. In particolare $X_0 \in T$.

Il Teorema di Golab (Teorema 3.13) assicura infine l'inferiore semicontinuità per successioni di \mathcal{H}^1 . Da cui

$$\inf_{X \in T} \mathcal{H}^1(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(X_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(X_k) \geq \mathcal{H}^1(X_0)$$

e poiché $X_0 \in T$, X_0 è un minimo. \square

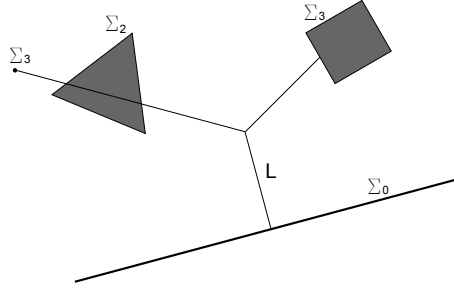


Figura 10: Un esempio di minimo che connette un insieme di misura positiva.

5.1 Regolarità del minimo nel caso in cui Σ sia compatto con un numero finito di componenti connesse

Andiamo ora a studiare la regolarità del minimo anche nel caso più generale in cui l'insieme Σ sia un compatto qualunque costituito da un numero finito di componenti connesse.

Mostriamo che, anche con queste ipotesi su Σ , il minimo che lo connette, che chiameremo L per distinguerlo dai due casi precedenti in cui il minimo conteneva Σ , è unione finita di segmenti con parte interna disgiunta.

Teorema 5.3. *Siano Σ un insieme compatto di \mathbb{R}^N con un numero finito di componenti connesse: $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{a-1}$ e L un minimo compatto connesso con $L \cup \Sigma$ compatto connesso, allora L è unione finita di curve iniettive e lipschitziane che, a due a due, si intersecano al più negli estremi.*

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $i \in \{0, \dots, a-1\}$ si ha $\Sigma_i \cap L \neq \emptyset$. Se infatti esistesse un indice i_0 tale che $\Sigma_{i_0} \cap L = \emptyset$ allora $L \cup \Sigma$ non sarebbe connesso in quanto Σ_{i_0} e

$$(L \cup \Sigma) \setminus \Sigma_{i_0} = L \cup \bigcup_{i \neq i_0} \Sigma_i$$

sarebbero due chiusi disgiunti e non vuoti la cui unione dà $L \cup \Sigma$.

Per $i = 0, \dots, a-1$ consideriamo $s_i \in \Sigma_i \cap L$. Chiamiamo $S := \{s_0, \dots, s_{a-1}\}$.

Adattando la dimostrazione del Teorema 4.1, in cui K viene sostituito da L e Σ dall'insieme S , si fa vedere che L è unione finita di curve iniettive e lipschitziane che, a due a due, si intersecano al più negli estremi. \square

Definizione 5.4. Essendo ogni minimo $L = \bigcup_{i=1}^h [\eta_i]$, un punto $x \in L \setminus \Sigma$ si dice un *punto di Steiner* se esistono $u, v \in \{1, \dots, h\}$, con $u \neq v$ e $t_i, t_j \in [0, 1]$ tali che $\eta_u(t_i) = \eta_v(t_j) = x$.

Osserviamo che, poiché ogni volta che si aggiunge una nuova curva si crea al massimo un nuovo punto di Steiner, tali punti sono al più $a - 2$.

Teorema 5.5. *Sia Σ un insieme compatto di \mathbb{R}^N con un numero finito di componenti connesse: $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{a-1}$, allora per ogni minimo L si ha che $L = \bigcup_{i=1}^h [\eta_i]$ dove ogni $[\eta_i]$ è il segmento avente come estremi gli estremi della curva stessa.*

Dimostrazione. Anche in questo caso la dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 4.3. \square

Bibliografia

- [1] L. Ambrosio - P. Tilli: *Selected Topics on Analysis in Metric Spaces* (Scuola normale superiore di Pisa)
- [2] M. Barnsley: *Fractals Everywhere* (Academic Press, 1988)
- [3] A.O. Ivanov - A.A. Tuzhilin: *Minimal Networks: The Steiner problem and Its Generalizations* (CRC Press, Inc, 1994)
- [4] S. Ducret - M. Troyanov: *Steiner's invariant and minimal connections* (Portugal. Math. (N.S.) Vol. 65, Fasc. 2, 237-242, 2008)
- [5] M. R. Garey - R. L. Graham - D. S. Johnson: *Some NP-complete Geometric problems* (Eighth Annual Symposium on Theory of Computation, 1976, 10-22)
- [6] W. Rudin: *Real and Complex Analysis* (McGraw-Hill serie in higher mathematics)
- [7] L. Evans - R.F. Gariepy *Measure Theory and Fine Properties of Functions* (CRC Press, Inc, 1992)