UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - A.A 2009-2010

TITOLO DELLA TESI:

Il teorema di Banach-Tarski

Relatore: Dott. Emanuele Paolini

Candidato: Pietro Lenarda

1 Introduzione

Il teorema di Banach-Tarski è conosciuto in letteratura matematica come "paradosso", questo non perchè esso è effettivamente un paradosso, ma semplicemente perchè dimostra un risultato controintuitivo. Esso fu inizialmente concepito come controesempio da Banach e Tarski , che stavano cercando di derivare una contraddizione dall'assioma della scelta all'interno della teoria della misura, ma che invece giunsero a conseguenze abbastanza inaspettate. In pratica il teorema afferma che è possibile decomporre una palla in un numero finito di pezzi e riassemblare questi stessi pezzi per formare due palle identiche a quella originaria. Detto così questo enunciato parrebbe assurdo, ma vedremo tra poco cosa si intende per "decomporre", per "pezzi" e per "riassemblare" introducendo una opportuna definizione di insiemi equidecomponibili. Un risultato ancora più sorprendente, che seguirà facilmente come corollario è la cosiddetta forma forte del teorema che afferma che due qualsiasi sottoinsiemi dello spazio con interni non vuoti sono equidecomponibili: in pratica, è come dire che è possibile tagliare una pera in pezzi e, usando solo traslazioni e rotazioni, ricomporre i pezzi per ottenere un insieme grande come il sole. Infine si parlerà di un Teorema che sembrerebbe andare in direzione contraria a quello di Banach Tarski, noto come Teorema di Dehn.

2 Equidecomponibilità

Ma diamo subito qualche definizione. Denotiamo con B^n la palla aperta di raggio unitario, e sia S^{n-1} la superficie sferica di B^n cioè l'insieme dei punti che distano dal centro esattamente uno. Una isometra di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione biettiva da $\mathbb{R}^n$ in sè che conserva la distanza indotta dal prodotto scalare canonico.C'è un teorema che caratterizza completamente le isometrie.

Teorema 1 (Caratterizzazione delle isometrie)

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n isometria \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = Ax + c$$

dove $A \in O(n)$ è una matrice ortogonale e $c \in \mathbb{R}^n$

Le isometrie formano un gruppo con la composizione che denotiamo con G_n, e tale gruppo è completamente determinato dallo studio del gruppo ortogonale $O(n)$, in particolare dal sottogruppo $SO(n)$ delle trasformazioni ortogonali che conservano l'orientazione, o isometrie dirette.

Perchè ci interessano le isometrie? Perchè il gruppo delle isometrie descrive la struttra euclidea di $\mathbb{R}^n$ sono movimenti rigidi ossia composizioni di rotazioni e traslazioni.

Definizione 1 (equidecomponibilità) *Diciamo che due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sono equidecomponibili e scriviamo $A \sim B$ se esistono degli insiemi a due a due disgiunti $A_1, \ldots, A_N$ e delle isometrie dirette $\phi_1, \ldots, \phi_N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che:*

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \qquad B = \bigcup_{i=1}^{N} \phi_i(A_i), \qquad \phi_i(A_i) \cap \phi_j(A_j) = \varnothing.$$

Osservazione 1 *Non c'è nessuna limitazione al tipo di insiemi A_i che compaiono nella decomposizione, si richiede soltanto che siano in numero finito.*

Ora: il teorema di Banach Tarski ci pare assurdo poichè abbiamo l'idea intuitiva che ad ogni oggetto debba nacessariamenta essere associata la sua misura e che quest'ultima abbia delle proprietà che si accordano in modo decente alla struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$. Quello che vorremmo è definire una applicazione $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ definita sulle parti di $\mathbb{R}^n$ e invariante per equidecomposizione; richiediamo che abbia le seguenti proprietà:

1. $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$, se $A_i \cap A_j = \varnothing$ per $i \neq j$,
2. $\forall \varphi \in G_n$, $\forall A \in \mathbb{R}^n$, $\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$,
3. $0 < \mu(B^n) < +\infty$.

Tale funzione associa ad ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ un numero, che ne rappresenta il volume, inoltre vogliamo che sia numerabilmente additiva , invariante per isometrie e non banale. Tuttavia una tale funzione non esiste su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, forniamo come esempio la costruzione dell'insieme di Vitali, l'estensione al caso di $\mathbb{R}^n$ è banale.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ poniamo $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$; $\sim$ è relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$. Considero $\mathbb{R}/\sim$. Ogni classe di equivalenza ammette un rappresentante nell'intervallo $[0,1]$ infatti: fissato $x \in \mathbb{R}$, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $x - q \in \ (0,1) \Longrightarrow$ posto $y = x - q$ si ha che $x \sim y$ e $y \in [0,1]$. Per l'assioma della scelta esiste un insieme $V \in [0,1]$ ottenuto prendendo, per ogni classe di equivalenza, uno e un solo rappresentante in $[0,1]$
Consideriamo l'insieme $E = \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (V + q)$,

Osservazione 2 *$\forall p, q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$, $(V+q) \cap (V+p) = \varnothing$. quindi E è una unione numerabile di insiemi a due a due disgiunti.*

Osservazione 3 *$[0,1] \subset E \subset [-1,2]$; la seconda inclusione segue dalla costruzione di E mentre se $x \in [0,1]$ sia $v \in V$ il rappresentante della classe di equivalenza di $x \Longrightarrow v - x = q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Quindi si ha che $0 < \mu(E) < +\infty$.*

Tuttavia: $0 < \mu(E) = \mu(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V+q)) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(V+q) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(V) < +\infty$,
L'unica possibilità per V è che $\mu(V) = 0$ ma allora anche $\mu(E) = 0$ assurdo per (3)
Questo esempio mostra che esistono insiemi non misurabili, e dunque che non si può definire una misura con le proprietà (1), (2), (3) su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma bisogna restringerla ad una classe di insiemi detti appunto misurabili.

Teorema 2 (Banach-Tarski) *B^3 è equidecomponibile a due copie isometriche di sè stessa. $\exists id \neq \tau$ traslazione tale che :*

$$B^3 \sim B^3 \cup \tau(B^3), \qquad B^3 \cap \tau(B^3) = \varnothing.$$

Osservazione 4 *Una prima conseguenza è che i pezzi in cui viene decomposta la palla non sono tutti misurabili. Inoltre poiché è possibile estendere il teorema ad $n \geqslant 3$ si ha che non esiste una misura invariante sulle parti di $\mathbb{R}^n$ neppure se sostituisco la numerabile additività con l'additivita finita , che è una conseguenza più forte dell'esempio di Vitali.*

3 Decomposizione di un gruppo libero su due elementi

La decomposizione della palla nel Teorema di Banach-Tarski si basa sull'esistenza, all'interno del gruppo delle isometrie dirette della sfera, di un sottogruppo libero generato da due elementi di $SO(3)$. Considero due rotazioni φ , $\psi \in SO(3)$. Sia $G = \langle \varphi, \psi \rangle$ il sottogruppo generato da φ, ψ. Allora

$$G = \{ w = \varphi^{\alpha_1} \psi^{\alpha_2} \ldots \varphi^{\alpha_{n-1}} \psi^{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \ldots n \}$$

Ogni elemento di G si rappresenta come una parola w scritta con le lettere $A = \{\varphi, \varphi^{-1}, \psi, \psi^{-1}\}$.

Definizione 2 *Una parola di G si dice ridotta se nella sua rappresentazione non ammette alcuna coppia consecutiva di elementi del tipo xx^{-1}, con $x \in A$, cioè non contiene mai una lettera e a seguire la sua inversa.*

Definizione 3 *Diremo che G è liberamente generato da φ, ψ o è libero su φ, ψ se nessuna parola ridotta è mai l'identità.*

Osservazione 5 *Se G è liberamente generato ogni elemento di G si scrive in modo unico come composizione di $\varphi, \psi, \varphi^{-1}, \psi^{-1}$ senza usare mai di seguito una rotazione e la sua inversa, ossia ogni elemento di G diverso dall'identità corrisponde ad una parola ridotta.*

In $SO(2)$ non è possibile trovare un sottogruppo libero di rango 2 infatti date $\varphi, \psi \in SO(2)$ essendo $SO(2)$ abeliano si ha $\varphi\psi = \psi\varphi \Longrightarrow \varphi^{-1}\psi^{-1}\varphi\psi = id$.
In $SO(3)$ è possibile trovare due rotazioni φ, ψ che generano un gruppo libero.
In generale esiste il seguente teorema :

Teorema 3 (Tits) *Sia $\mathbb{F}$ campo, $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$ $G \leqslant GL(n,\mathbb{F})$ allora G contiene un sottogruppo libero di rango almeno 2 oppure ammette un sottogruppo risolubile di indice finito.*

Tuttavia noi ci limiteremo a dare due opportune rotazioni e verificare che esse generano un sottogruppo libero.

Proposizione 1 *Siano φ, ψ rotazioni di un angolo $\alpha = arcos(1/3)$ rispettivamente attorno all'asse z e all'asse $x \Longrightarrow$ il gruppo $G = \langle \varphi, \psi \rangle$ è liberamente generato.*

Dimostrazione Le due rotazioni nelle ipotesi sono rappresentate dalle matrici

$$\phi^{\pm\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi^{\pm\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vediamo che non ottengo mai l'identità con una parola ridotta in $\varphi^{\pm1}, \psi^{\pm1}$. Sia w parola ridotta che finisce per $\varphi^{\pm1}$. Se $w \neq id \Longrightarrow$ il coniugato è una parola che non comincia per φ e $w^{\pm\varphi} \neq id$ quindi ho finito.
Sia $w = \varphi^{\alpha_1}\psi^{\alpha_2}\dots\psi^{\alpha_{n-1}}\varphi^{\alpha_n}$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ per $i = 1\dots n-1$, $\alpha_n \neq 0$. Verifichiamo per induzione sulla lunghezza n di w che: $w(1,0,0) = \frac{1}{3^n}(a, b\sqrt{2}, c)$ con $a,b,c \in \mathbb{Z}$ e $3 \nmid b$.
Se w ha lunghezza $1 \Longrightarrow w = \varphi^{\pm1}$ allora $w(1,0,0) = \frac{1}{3}(1, \pm2\sqrt{2}, 0)$ se $w = \varphi^{\pm1}w'$ oppure $w = \psi^{\pm1}w'$ dove w' è una parola ridotta di lunghezza $n-1 \Longrightarrow$ per ipotesi induttiva $w'(1,0,0) = \frac{1}{3^{n-1}}(a', b'\sqrt{2}, c')$ dove $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ e $3 \nmid b' \Longrightarrow$ applicando $\varphi^{\pm1}$ o $\psi^{\pm1}$ ottengo che $w(1,0,0) = \frac{1}{3^n}(a, b\sqrt{2}, c)$ dove: $a = a' \mp 4b'$, $b = b' \pm 2a'$, $c = c'$ nel caso $\varphi^{\pm1}$ o $a = 3a'$, $b = b' \mp 2c'$, $c = c' \pm 4b'$ nel caso $\psi^{\pm1}$. Infine $3 \nmid b'$ per verifica diretta. $\square$

Posso trovare dei sottoinsiemi propri di G che spostati mediante φ, ψ mi danno due copie identiche di G.
Considero i sottoinsiemi di G definiti da G_φ, $G_{\varphi^{-1}}$, G_ψ, $G_{\psi^{-1}}$ dove G_φ indica l'insieme della parole che cominciano con la lettera φ ovviamente sono a due a due disgiunti e risulta che:

$$G = G_\varphi \cup G_{\varphi^{-1}} \cup G_\psi \cup G_{\psi^{-1}} \cup \{id\}.$$

Tuttavia poichè $\varphi G_{\varphi^{-1}} = G \setminus G_\varphi$ allora $G = G_\varphi \cup \varphi G_{\varphi^{-1}} = G_\psi \cup \psi G_{\psi^{-1}}$.

4 Azione del gruppo libero sulla sfera

Dimostriamo adesso un risultato dovuto ad Hausdorff sulla decomposizione paradossale di "quasi" tutta la superficie sferica.

Teorema 4 *Esiste $D \subset S^2$ numerabile tale che $S^2 \setminus D$ è equidecomponibile a due copie di se stesso.*

Dimostrazione Consideriamo per $g \in G$ il suo asse di rotazione ossia $fix(g) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = x\}$ ($R \in SO(3)$ allora R la come autovalore $\lambda = 1$ e l'autospazio di $\lambda = 1$ ha dimensione 1 ed è $fix(R)$). Sia $D' = \{x \in S^2 \mid x = fix(g) \cap S^2, g \in G\}$, D' è numerabile essendo G numerabile (conto le parole disponendole in ordine alfabetico). Sia $D = G(D') = \bigcup_{g \in G} g(D')$, anche D è un insieme numerabile. G agisce in modo naturale su $S^2 \setminus D$ ossia, per ogni $x \in S^2 \setminus D$ e $\forall g \in G$ $g(x) \in S^2 \setminus D$ infatti:
$g(x) \in S^2$ poiché g è rotazione e se fosse $g(x) \in D \Longrightarrow g(x) = h(z)$ per qualche $z \in D', h \in G$ si avrebbe $x = g^{-1}h(z) \in D$ assurdo.
L'orbita di un elemento $x \in S^2 \setminus D$ è l'insieme $Orb(x) = \{g(x) | g \in G\} \Longrightarrow$ se $x, y \in S^2 \setminus D$ $Orb(x) = Orb(y) \Longleftrightarrow \exists g \in G$ tale che $g(x) = y$, l'insieme delle orbite è una partizione di $S^2 \setminus D$.

Per L'assioma della scelta posso creare un insieme $M \subset S^2 \setminus D$ che contiene uno e un solo punto per ogni orbita. Allora ogni $x \in M$ ha la proprietà che $g(x) \notin M \forall g \in G$. Allora risulta che: $S^2 \setminus D = G(M)$ infatti $\forall y \in S^2 \setminus D$, $\exists x \in M$ tale che $y \in Orb(x)$ allora esiste $g \in G$ con $g(x) = y$. Considero adesso gli insiemi $g(M)$ al variare di g in G, vediamo che: se $g, h \in G$ e $g \neq h \Longrightarrow g(M) \cap h(M) = \varnothing$. Supponiamo che esistano $x, y \in M$ tali che $g(x) = h(y)$. Se $x = y$ allora avrei $h^{-1}g(x) = x$ quindi $\in fix(h^{-1}g)$ allora $x \in D$ assurdo. Se $x \neq y \Longrightarrow h^{-1}g(x) = y$, $\Longrightarrow y \in Orb(x)$ ma questo non è possibile per come è definito M. Ora : se $H \subseteq G \Longrightarrow H(M) = \bigcup_{h \in H} h(M)$, ricordando la decomposizione di G trovata alla fine della precedente sezione poniamo:

$$A_1 = G_\varphi(M), A_2 = G_{\varphi^{-1}}(M), A_3 = G_\psi(M), A_4 = G_{\psi^{-1}}$$

per quanto si è detto prima questi sottoinsiemi sono a due a due disgiunti e risulta:

$$S^2 \setminus D = G(M) = \bigcup_{i=1}^{4} A_i \cup M \qquad S^2 \setminus D = G(M) = A_1 \cup \varphi(A_2) = A_3 \cup \psi(A_4).$$

Allora si è trovata una decomposizione di (un sottoinsieme) di $S^2 \setminus D$ in due copie isometriche di $S^2 \setminus D$ $\square$.

5 Il teorema di Bernstein

In questa sezione approfondiamo il significato della relazione di equivalenza $\sim$

Definizione 4 *$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ si pone $A \preccurlyeq B$ se esiste $B_1 \subseteq B$ tale che $A \sim B_1$*

Osservazione 6 *$\preccurlyeq$ è una relazione riflessiva e transitiva sulle classi di equivalenza modulo $\sim$ di $\mathbb{R}^n$*

Inoltre valgono le proprietà:

1. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ se $A \sim B \Longrightarrow$ esiste $f : A \longrightarrow B$ biezione tale che se $C \subsetneq A \Longrightarrow C \sim f(C)$
2. se $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \varnothing$ e $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ allora $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$

Dimostrazione 1. Siano A_i a due a due disgiunti tali che $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ e $\varphi_1 \dots \varphi_N$ isometrie di $\mathbb{R}^n$ per cui $B = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(A_i)$ con $\varphi_i(A_i)$ a due a due disgiunti, allora si definisce f come

$$A \in x \longmapsto f(x) = \varphi_i(x) \qquad x \in A_i$$

Allora f è biezione, essendo φ_i biezioni definite su pezzi disgiunti. Inoltre se $C \subsetneq A \Longrightarrow C = C \cap A = \bigcup_{i=1}^{N} (A_i \cap C) \Longrightarrow f(C) = f(\bigcup_{i=1}^{N} (A_i \cap C)) = \bigcup_{i=1}^{N} f(A_i \cap C) = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(A_i) \cap \varphi_i(C)$.

Dimostrazione 2. ok!

In teoria degli insiemi l'equipotenza è una relazione di equivalenza, si può definire una relazione $\preccurlyeq$, e vale il teorema di Cantor-Bernstein, che ci dice che per l'equipotenza la relazione $\preccurlyeq$ è di ordine parziale.
Banach estende questo teorema ad una qualsiasi relazione $\preccurlyeq$ che sia di ordine parziale sulle classi di equivalenza modulo $\sim$ di X insieme, che verifichi le proprietà 1. e 2.

Teorema 5 (Cantor-Bernstein) *$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq B \Longrightarrow A \sim B$.*

Dimostrazione Per 1. esistono h, k biezioni $h : A \longrightarrow B_1 \subset B \quad k : B \longrightarrow A_1 \subset A$ con $A \sim B_1$ e $B \sim A_1$. Considero la seguente successione di insiemi $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} A_0 &= A \\ A_1 &= k(B) \\ A_{j+2} &= k \circ h(A_j) \end{cases}$$

Si ha che $A_{j+1} \subseteq A_j$ allora gli insiemi $H_j = A_{2j} \setminus A_{2j+1} \quad j \in \mathbb{N}$ sono a due a due disgiunti. Considero $H = \bigcup_{j=0}^{\infty} H_j = \bigcup_{j=0}^{\infty}(A_{2j} \setminus A_{2j+1})$ allora $k \circ h(H) = \bigcup_{j=0}^{\infty} k \circ h(A_{2j} \setminus A_{2j+1}) = \bigcup_{j=0}^{\infty} (A_{2j+2} \setminus A_{2j+3}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{2j} \setminus A_{2j+1}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$ poiché
$H \cup (A_1 \setminus A_2) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2j} \setminus A_{2j+1}) \cup (A_1 \setminus A_2) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A \setminus A_i)$ allora si ha che

$$A = H \cup \underbrace{(A_1 \setminus A_2) \cap \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j}_{=L} = H \cup L \qquad k(B) = A_1 = k \circ h(H) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j = k \circ h(H) \cup L,$$

allora $L = A \setminus H = k(B) \setminus k \circ h(H) = k(B \setminus h(H))$ che implica per come è fatta k che $A \setminus H \sim B \setminus h(H)$ inoltre per la 1. si ha che $H \sim h(H)$ e per 2. si ottiene:
$A = (A \setminus H) \cup H \sim (B \setminus h(H)) \cup h(H) = B \Longrightarrow A \sim B$ $\square$

6 Assorbimento di un insieme numerabile

Siamo arrivati a $S^2 \setminus D \sim S^2 \setminus D \cup \tau(S^2 \setminus D) \qquad \tau$ traslazione tale che $S^2 \setminus D \cap \tau(S^2 \setminus D) = \varnothing$, dove D è un sottoinsieme numerabile di S^2.
Eliminare l'insieme D è un problema di assorbimento.

Proposizione 2 *$D \subset S^2$ numerabile, allora $S^2 \setminus D \sim S^2$ usando rotazioni di $SO(3)$.*

Dimostrazione Sia r retta per l'origine tale che $r \cap D = \varnothing$ allora per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$ chiamo σ la rotazione di un angolo θ attorno d r. Considero l'insieme

$$A = \{\theta \in [0, 2\pi) | \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x \in D \quad \sigma^n(x) \in D\},$$

A è numerabile (essendo D numerabile) allora posso scegliere un $\theta \notin A$ e sia σ la corrispondente rotazione attorno ad r allora $\sigma^n(D) \cap D = \varnothing \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ in particolare : $\sigma^m(D) \cap \sigma^n(D) = \varnothing \qquad \forall n \neq m$ allora $D, \sigma(D), \sigma^2(D), \ldots, \sigma^n(D), \ldots$ sono a due a due disgiunti. Considero l'insieme $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n(D)$ allora si ha che $\sigma(\Delta) = \Delta \setminus D$ infatti:
$\Delta = D \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma^n(D) = D \cup \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n(D)) = D \cup \sigma(\Delta)$. Infine:
$S^2 = \Delta \cup (S^2 \setminus \Delta) \sim \sigma(\Delta) \cup (S^2 \setminus \Delta) = (\Delta \setminus D) \cup (S^2 \setminus \Delta) = S^2 \setminus D \qquad \square$

Una conseguenza immediata della Proposizione precedente è che $S^2 \sim S^2 \cup \tau(S^2) \qquad \tau$ traslazione tale che $S^2 \cap \tau(S^2) = \varnothing$. A questo punto il Teorema di Banach-Tarski segue facilmente.

Teorema 6 (Banach-Tarski) *$B^3(0,1) \sim B^3(0,1) \cup \tau(B^3(0,1)) \qquad \tau$ traslazione tale che $B^3(0,1) \cap \tau(B^3(0,1)) = \varnothing$.*

Dimostrazione Considero i coni di base gli insiemi $A_1, \ldots, A_4$ e vertice l'origine e ottengo una decomposizione paradossale di $B^3(0,1) \setminus \{0\}$ in due copie di sè stessa. Analogamente a quanto visto nella proposizione precedente resta da assorbire l'origine. Sia ρ una rotazione di ordine infinito (cioè di un angolo irrazionale rispetto a 2π) attorno ad un asse che non passa per l'origine.
Sia $E = \{\rho^n(0) | \quad n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow \rho(E) = E \setminus \{0\}$ quindi:
$B^3(0,1) = (B^3(0,1) \setminus E) \cup E \sim (B^3(0,1) \setminus E) \cup \rho(E) = (B^3(0,1) \setminus E) \cup E \setminus \{0\} = B^3(0,1) \setminus \{0\}$ $\square$

Corollario 1 (Forma forte) *$A, B \subset \mathbb{R}^3$ limitati e tali che $int(A), int(B) \neq \varnothing \Longrightarrow A \sim B$.*

Dimostrazione Poichè $int(A) \neq \varnothing \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tale che la palla $B_\varepsilon \subset A$. B limitato $\Longrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $B \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^{(i)} \Longrightarrow$ per il teorema di Banach-Tarski $B_\varepsilon \sim B_\varepsilon^{(1)} \cup B_\varepsilon^{(2)} \sim \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^{(i)}$. $B \preccurlyeq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^{(i)} \sim B_\varepsilon \subset A$ allora $B \preccurlyeq A$. Posso ripetere lo stesso ragionamento scambiando il ruolo di A e B ottenendo $A \preccurlyeq B$ quindi per il teorema di Bernstein si ha $A \sim B$ □

In seguito al risultato di Banach-Tarski si sono aperte varie questioni. Ad esempio uno potrebbe chiedersi qual'è il numero minimo di pezzi per ottenere una decomposizione paradossale della palla? é stato dimostrato che tale minimo è 5. Oppure se la stessa costruzione vale anche in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$? La risposta è che in dimensione 1 e 2 non posso trovare sottogruppi liberi generati da due elementi essendo G_1 e G_2 risolubili e dunque per il teorema di Tits non ammettono sottogruppi liberi, tuttavia si possono generare anche in questi casi paradossi usando altri metodi. Un'altra questione che è stata sollevata è sulla topologia dei pezzi nella decomposizione. Appare evidente che essi non sono tutti insiemi misurabili secondo Lebesgue quindi non sono Boreliani. Si può dimostrare che l'insieme M nella dimostrazione non ha la proprietà di Barie.

7 Il teorema di Dehn

Consideriamo due n-poliedri in $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$,

Definizione 5 *$\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ sono equiscindibili se è possibile trovare degli n-poliedri $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_N$ e delle isometrie dirette $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ tali che*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{P}_i, \qquad \mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(\mathcal{P}_i),$$

e tali che le intersezioni $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$, $\varphi_i(\mathcal{P}_i) \cap \varphi_j(\mathcal{P}_j)$ siano contenute in piani $(n-1)$-dimensionali (ossia abbiano parte interna non vuota).

Il volume si preserva per equiscissione, ossia due poliedri equiscindibili hanno lo stesso volume. Hilbert si chiede se un tetraedro (poliedro regolare a quattro facce , ognuna delle quali è un triangolo equilatero) è equiscindibile ad un cubo, in tal caso, si potrebbe calcolare il volume di una piramide senza ricorrere al calcolo delle sezioni e poi integrare lungo l'altezza. Tuttavia la risposta alla domanda di Hilbert è negativa ed è fornita dal teorema di Dehn, la cui dimostrazione si basa sull'esistenza di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ additive non omogenee, usando una tale applicazione viene definita un'altra funzione definita sui poliedri, invariante per equiscissione che assume valori differenti sul cubo e sul tetraedro.

Osservazione 7 *Consideriamo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$, posso definire una funzione Q-lineare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ fissandone a piacere i valori che deve assumere lungo i vettori di una base di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$. I vettori 1, π sono linearmente indipendenti, allora esiste il completamento a una base di tali vettori. Definisco la funzione $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ imponendo $L(1) = 1$, $L(\pi) \neq \pi$ e a piacere sugli altri vettori della base.*

Teorema 7 (Dehn) *Un tetraedro e un cubo dello stesso volume non sono equiscindibili.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{P}$ un generico poliedro, se s è uno spigolo di $\mathcal{P}$, siano rispettivamente α_s l'angolo formato dalle due facce di $\mathcal{P}$ che si appoggiano su s e $l(s)$ la lunghezza dello spigolo. Sia L una funzione additiva tale che $L(\pi) = 0$ e $L(arcos(1/3)) \neq 0$, si può sempre trovare dato che $arcos(1/3)$ è irrazionale con π. Allora considero la seguente funzione

$$\Lambda(\mathcal{P}) = \sum_s L(\alpha_s) l(s).$$

Verifichiamo che Λ è invariante per equiscissione. Sia $\mathcal{P}$ equiscisso nei poliedri $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_N$. Uno spigolo s di $\mathcal{P}$, sarà diviso in uu numero finito di spigoli dei poliedri $\mathcal{P}_i$. La lunghezza $l(s)$ sarà esattamente la somma delle lunghezze dei vari spigoli e l'angolo α_s sarà la somma dei rispettivi angoli tra le facce dei poliedri che appoggiano uno spigolo su s. D'altra parte i nuovi spigoli che si

vengono a creare nella equiscissione non contribuiscono a Λ in quanto se il nuovo spigolo è interno a $\mathcal{P}$ la somma degli angoli su tale spigolo è 2π , e se s è su una faccia di $\mathcal{P}$ tale somma fa π, in ogni caso essendo L additiva si ha che $L(\pi) = L(2\pi) = 0$ quindi Λ è invariante per equiscissione.
Ora se $\mathcal{C}$ è un cubo allora gli angoli diedri sono tutti $\pi/2$ allora $\Lambda(\mathcal{C}) = 0$ poichè L è $\mathbb{Q}$-lineare. Invece gli angoli diedri del tetraedro $\mathcal{T}$ misurano tutti $arcos(1/3)$ e dunque per la scelta di L $\Lambda(\mathcal{T}) \neq 0$ quindi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{T}$ non sono equiscindibili. $\square$

Anche in questo caso, come nell'esempio di Vitali e nel teorema di Banach-Tarski si è usato l'assioma della scelta, precisamente quando si dice che esiste una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}$ sul campo $\mathbb{Q}$. Appare evidente che l'assioma della scelta ha un ruolo importante nella costruzione di questi esempi e vale la pena spendere due parole sull'argomento. L'assioma della scelta AC è indipendente dagli altri assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel ZF. Questo significa che esso non può essere dimostrato in ZF e che se ZF è coerente allora anche $ZF + AC$ è coerente. Dunque è equivalente in matematica considerare o meno l'assioma della scelta, anche se nel secondo caso, molti risultati non potrebbero più essere derivati come ad esempio il teorema dell'esistenza di una base di uno spazio vettoriale; tuttavia l'accettazione dell'assioma della scelta comporta spiacevoli conseguenze come appunto il teorema di Banach-Tarski o l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue.
L'assioma della scelta fu usato da Zermelo per dimostrare il teorema del buon ordinamento per cui ogni insieme X ammette una relazione d'ordine tale che ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un minimo. Zermelo enuncia gli assiomi da cui è possibile derivare questo teorema $ZF + AC$, lasciando aperta la questione se questi assiomi possano portare o no a paradossi anche all'interno dell'analisi.