UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 26/05/01

Esercizio 1. Sia $\alpha(t) = (\cos(t), (1+t^2)\cdot\sin(t), \pi^2 - t^2)$ per $t \in [-\pi, \pi]$.

(A) [4 punti] Si dimostri che α è una curva semplice e chiusa e non è contenuta in alcun piano.

(B) [4 punti] Si dimostri che se ω è una forma del tipo $a(x,z)\,\mathrm{d}x + b(x,z)\,\mathrm{d}z$ allora $\int_\alpha \omega = 0$.

(C) [4 punti] Si dimostri che $\int_\alpha y = 0$.

(D) [3 punti] Si calcoli $\int_\alpha y\,\mathrm{d}z$.

Esercizio 2. Data una qualsiasi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua si definisca $V(f)$ come l'insieme di tutte le funzioni $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili e tali che

$$x'(t) = x(t)\cdot f(t) \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Si dimostri che:

(A) [3 punti] Data $x \in V(f)$ tale che $x(t_0) = 0$ per qualche $t_0 \in \mathbb{R}$, si ha $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(B) [2 punti] Date $x_1, x_2 \in V(f)$ tali che $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ per qualche $t_0 \in \mathbb{R}$, si ha $x_1(t) = x_2(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(C) [2 punti] $V(f)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 1.

(D) [2 punti] Se $x \in V(f)$ e x non si annulla mai allora $1/x \in V(-f)$

(E) [2 punti] Se f ammette derivata continua e non si annulla mai allora $x' \in V(f + f'/f)$.

(F) [2 punti] Date $x \in V(f)$ e $y \in V(g)$ si ha che $x \cdot y \in V(f+g)$.

(G) [2 punti] Fissata $x_0 \in V(f)$ mai nulla e posto $\Phi(y) = x_0 \cdot y$ si ha che $\Phi : V(g) \to V(f+g)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali reali.

Esercizio 3. Sia f la funzione meromorfa definita come segue:

$$f(z) = \frac{z^3 + 2iz^2 + 1}{z^4 - 2iz^3 + 3z^2 - 4iz + 4}.$$

(A) [3 punti] Si dimostri che $z_1 = -i$ è un polo di f di ordine 2.

(B) [2 punti] Si dimostri che f ha un solo altro polo z_2 anch'esso di ordine 2.

Al variare di p in $\mathbb{C}$ sia ora $C_p \subset \mathbb{C}$ la circonferenza di centro p e raggio 2 e sia $I(p) = \int_{C_p} f(z)\,\mathrm{d}z$.

(C) [3 punti] Si mostri che l'insieme $V = \{p \in \mathbb{C} : \ I(p) \text{ non è definito}\}$ è l'unione di due circonferenze ognuna contenente un solo polo di f.

(E) [3 punti] Si dimostri che se Ω è un insieme aperto e connesso contenuto in $\mathbb{C} \setminus V$ allora $I(p)$ è costante su Ω.

(F) [2 punti] Si calcoli il valore di tale $I(p)$ per ogni p in $\mathbb{C} \setminus V$.

Si ponga ora $f_1(z) = f(z) \cdot (z - z_1)^2$ e $f_2(z) = f(z) \cdot (z - z_2)^2$.

(G) [2 punti] Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent di f_1 in z_2 e di f_2 in z_1.