Matematica III — Scritto del 28/09/02

Esercizio 1. Sia $\Delta(r)$ il disco in $\mathbb{C}$ di centro 0 e raggio r. Si considerino le funzioni meromorfe f e g definite come segue:

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)}\ , \qquad g(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}\ .$$

(A) [3 punti] Si trovino i poli di f.

(B) [4 punti] Si dimostri che $g - f$ è una funzione olomorfa su $\Delta(1)$ e si calcoli $(g-f)(0)$.

(C) [4 punti] Si dimostri che se z e $-z$ sono poli per f, allora $\mathrm{Res}_z f = -\mathrm{Res}_{-z} f$.

(D) [4 punti] Si dimostri che la funzione $h : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ data da

$$h(t) = \int_{\partial\Delta(t)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

è definita per ogni t che non sia della forma $\sqrt{2k\pi}$ con $k \in \mathbb{N}$, ed è sempre nulla.

Esercizio 2. Sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x^2 - t^4 \\ x(0) = k. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che se $k < 0$ allora $x_k(t)$ esiste per ogni $t \geqslant 0$.

(B) [3 punti] Si dimostri che esiste una sola soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ e monotona decrescente.

(C) [3 punti] Sia y_k la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = k. \end{cases}$$

Si dimostri che per $0 < k \leqslant 1/2$ la y_k interseca in tre punti la parabola di equazione $y = t^2$.

(D) [3 punti] Si dimostri che se $0 < k < 1/2$ la x_k esiste per ogni t.

(E) [3 punti] Si dimostri che $x_{1/2}$ ha minimo e massimo locali rispettivamente per $t = a$ e $t = b$, con $a < (1-\sqrt{5})/2$ e con $0 < b < 1$.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la seguente superficie:

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1, \ |z| \leqslant 1\Big\}.$$

(A) [5 punti] Si consideri il campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z) = (x+y+z, x-y, 0)$. Si scelga un'orientazione per S e si calcoli

$$\left| \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \right|$$

ove $\vec{n}$ è la normale ad S determinata dall'orientazione.

(B) [5 punti] Si calcolino i valori massimo e minimo assunti dalla funzione $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ su S.

(C) [5 punti] Si consideri per $t \in [-1,1]$ il disco orizzontale

$$D_t = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1 + t^2, \ z = t\Big\}.$$

Sia $\vec{w}$ un campo con divergenza nulla e tangente ad S in ogni punto (cioè tale che $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ in ogni punto di S, dove $\vec{n}$ è la normale ad S). Si dimostri che la funzione $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(t) = \int_{D_t} \vec{w} \cdot (0,0,1)$$

è costante.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.