UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

# Matematica III — Scritto del 15/02/03

**Esercizio 1.** Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la 2-forma $\omega$ data da

$$\omega(x,y,z) = (z^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + z(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(A) [3 punti] Si dica se $\omega$ sia chiusa.

(B) [2 punti] Si dica se esista una 1-forma $\alpha$ tale che $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

(C) [3 punti] Si determinino tutte 2-forme $\beta$ tale che $\omega - \beta$ sia chiusa.

(D) [3 punti] Posto $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$, si calcoli $\left| \int_R \omega \right|$.

(E) [4 punti] Posto $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ z = \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$, si calcoli $\left| \int_S \omega \right|$.

**Esercizio 2.** Al variare di $\varepsilon$ in $[-1,1]$ sia $x_\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = \varepsilon t^2\,\mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -1/4. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si trovi $x_0$.

(B) [4 punti] Si trovi $x_1$.

(C) [3 punti] Si dimostri che $x_\varepsilon$ tende puntualmente ad $x_0$ per $\varepsilon \to 0$. Si dica se la convergenza sia in realtà uniforme.

(D) [5 punti] Si trovi il massimo $M(\varepsilon)$ di $x_\varepsilon$ su $[-1,1]$ ed il massimo di $M(\varepsilon)$ per $\varepsilon$ in $[-1,1]$.

**Esercizio 3.** Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ 1/3 < |z| < 2\}$ e sia $f$ la funzione data da:

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z-1}$$

(A) [3 punti] Si dica se nel punto 0 la $f$ abbia una singolarità eliminabile, un polo, o una singolarità essenziale.

(B) [3 punti] Si determinino gli zeri e i poli di $f$ su $\Omega$, specificandone l'ordine.

(C) [3 punti] Si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/4} \frac{f(z)}{z} \, \mathrm{d}z.$$

(D) [3 punti] Si calcoli $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z) \, \mathrm{d}z$.

(E) [3 punti] Definita la funzione meromorfa $g$ come $g(z) = f(1/z)$, su determinino i punti singolari di $g$ su $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1/3\}$, specificando se sono singolarità eliminabili, poli, o singolarità essenziali.