UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 21/6/03

Esercizio 1. Per $s > 0$ sia $\gamma_s : [0, s] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma_s(t) = (\,\mathrm{e}^{-t}\cos t,\, \mathrm{e}^{-t}\sin t).$$

(A) [3 punti] Si dimostri che esiste $\lim_{s\to\infty} \gamma_s(s)$.

(B) [4 punti] Detta $L(\gamma_s)$ la lunghezza di γ_s si calcoli, oppure si dimostri che non esiste, $\lim_{s\to\infty} L(\gamma_s)$.

(C) [4 punti] Sia α la 1-forma su $\mathbb{R}^2$ definita da $\alpha(x, y) = \dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$.

Si calcoli $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \int_{\gamma_s} \alpha$.

(D) [4 punti] Sia β la 1-forma su $\mathbb{R}^2$ definita da $\beta(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$.

Si calcoli $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \int_{\gamma_s} \beta$.

Esercizio 2. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ sia x_c la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} \dfrac{1 - x'}{1 + x'} = \dfrac{x + t}{x - t} \\[2ex] x(0) = c. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si discuta l'esistenza locale di x_c al variare di c.

(B) [3 punti] Per ogni c si trovi l'intervallo massimale su cui x_c è definita.

(C) [3 punti] Si tracci, al variare di c, un grafico approssimativo di x_c.

(D) [3 punti] Si calcoli $x_2'(0)$.

(E) [3 punti] Si calcoli $\inf_{t>0} x_1(t)$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$.

(A) [2 punti] Si trovino tutte le radici complesse di p.

(B) [4 punti] Si calcoli $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p(x)}\,\mathrm{d}x$.

(C) [4 punti] Definita $g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ tale che $g(x) = 6p'(x) - x^2 \cdot p'''(x)$, si calcoli la trasformata $\mathcal{L}(g)$ di Laplace di g, e si dica dove è definita.

Si ponga ora $f(t) = \displaystyle\int_{\partial\Delta_t} \frac{1}{p(z)}\,\mathrm{d}z$.

(D) [3 punti] Si dimostri che f è differenziabile in ogni punto in cui è definita.

(E) [2 punti] Si calcoli $f(2)$.