UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 20/11/04 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0) = -1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0) = -2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0) = 3$.
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial y_1}(0) = 7$, $\frac{\partial g}{\partial y_2}(0) = -5$. Calcolare $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_2}(0)$.

2. $\alpha(t) = (\frac{1}{3}t^3, 1, t)$, $t \in [0, 1]$. In quale di questi intervalli cade la lunghezza di α?
$(0, 1)$, $[1, \frac{6}{5})$, $[\frac{6}{5}, 2)$, $[2, +\infty)$.

3. $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (z^2 - x^2 - y^2)(x - z - z^3) = 0\}$.
Quali sono i punti vicino a cui Σ non è una superficie?

4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Calcolare $\int_S (z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z)$.

5. La soluzione di $\begin{cases} x' = -x(x^2 + t^2) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ è definita su $(-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty)$?

6. $\begin{cases} a_{n+3} = 18a_n + 3a_{n+1} - 4a_{n+2} \\ a_0 = 1, \ a_1 = -1, \ a_2 = 22. \end{cases}$ Calcolare $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^{-n} a_n$.

7. $f_n(t) = n^{-3/2} \sin(nt)$, $t \in [-\pi, \pi]$. La $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ è continua? Esiste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$?

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 20/11/04 — Esercizî

1. Sia $\sigma : \mathbb{R} \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t,z) = \begin{pmatrix} (2+z)\cos t \\ (2-z)\sin t \\ z \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che l'immagine Σ di σ è una superficie limitata con bordo, e che le restrizioni di σ la parametrizzano localmente.

(B) (3 punti) Dire se Σ sia ottenuta dalla rotazione di una curva contenuta in uno dei piani coordinati.

Orientare ora Σ a piacimento.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_\Sigma (z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\Sigma n_3$, dove $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ è la normale a Σ determinata dall'orientazione.

2. Sia x_α la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 - t^2 - 1 \\ x(0) = \alpha. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Provare che $x_{-\alpha}(t) = -x_\alpha(-t)$.

(B) (3 punti) Dire per quali α la x_α sia un polinomio.

(C) (4 punti) Discutere l'intervallo di esistenza di x_α, provando in particolare che x_α è definita su tutto $\mathbb{R}$ se $|\alpha| \leqslant 1$.

(D) (3 punti) Calcolare $\lim_{t\to\pm\infty} x_\alpha(t)$ per $|\alpha| \leqslant 1$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 20/11/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $7 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3 = -22$

2. $[1, \frac{6}{5})$

3. $(0, 0, 0)$

4. π

5. Su $[0, \infty)$ esiste perché decresce ed è positiva. Su $(-\infty, 0]$ no, confrontando con $y' = -y^3$.

6. $a_n = 2^n + n(-3)^n$, dunque il limite non esiste.

7. $\|f_n\| = n^{-3/2}$ dunque $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è continua; $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0)$ non converge.

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$