Geometria e Algebra 2 – Esercizi del 22/11/07

1) Siano $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\}$
$Y = \{x \in \mathbb{R}^4 : 5x_2 - x_3 + x_4 = 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$

Provare che $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$ e determinare le proiezioni associate a questa decomposizione.

2) Posto su $\mathbb{R}^4$ il prod. scal. standard, determinare le proiezioni ortogonali sui sottospazi X e Y dell'esercizio precedente.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.
Verificare che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prod scal su $\mathbb{R}^3$ e determinare f^* rispetto ad esso dove $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

4) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ ortogonali a $(2-i, 3+2i)$ con norma $\sqrt{5}$ e somma delle coordinate reale.

5) Ortonormalizzare la base di $\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

6) Completare a base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ il vettore $\begin{pmatrix} 2-i \\ -1+i \\ 2i \end{pmatrix}$.

7) Determinare un vettore di $\mathbb{C}^3$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}$ e con prima coordinata reale.

8) Determinare la proiezione ortogonale in $\mathbb{C}^2$ su $\mathrm{Span}(7-i, 4-\sqrt{2}i)$.

9) Determinare la proiezione ortogonale in $\mathbb{C}^3$ su $\mathrm{Span}((2-i, 1+2i, 3i), (1+i, -2, 2+i))$

10) Provare che $M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \{A : A^* = A\} \oplus \{A : A + A^* = 0\}$, calcolare la dimensione di questi sottospazi e dire se la decomposizione sia ortogonale rispetto a $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^* B)$.