"Geometria" - Esercizi del 10/03/09

(1) Ortonormalizzare le basi date

(a) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ (rispetto al prodotto scalare canonico)

(b) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (rispetto al prodotto scalare canonico)

(c) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ (rispetto al prodotto scalare canonico)

(d) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (rispetto al prodotto scalare canonico)

(2) Ortonormalizzare la base $\mathcal{B}$ data e trovare le coordinate del vettore v dato rispetto alla base ortonormale ottenuta:

(a) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

(c) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \qquad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 34 \end{pmatrix}$

(3) Si considera su V il prodotto scalare definito dalla matrice A data. Ortonormalizzare la base $\mathcal{B}$ data rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(4) Determinare la proiezione ortogonale da V sul sottospazio W rispetto a ...

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{2x - 7y = 0\}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{3x + 18y + 5z = 0\}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{array} \right\}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$

(d) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^4}$

(e) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{3x_1 + 2x_2 = 0\}$,

$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$