UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/9/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^7 : \ x_2 - 5x_4 + 2x_7 = 0\}$, quanto può valere n?

2. Se $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^9$ è lineare e non iniettiva, e $\mathbb{C}^9 = W \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere W?

3. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

4. Determinare $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

5. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, calcolare i determinanti delle orlate di M in A.

6. Se due numeri complessi hanno moduli rispettivamente $3\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$, che modulo ha il loro prodotto?

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 + 4e_2 - e_3)$,
calcolare la proiezione su X del vettore $-e_1 + 2e_2 + 3e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di t in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & t-1 & 3 \\ t & 4 & t-3 \end{pmatrix}$, il vettore $b_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ t-7 \\ 14 \end{pmatrix}$ e il sistema lineare $A_t \cdot x = b_t$.

(A) (3 punti) Provare che per $t = -1$ il sistema ha soluzione unica, ed esibire tale soluzione.

(B) (3 punti) Trovare il valore t_1 per cui il sistema ha infinite soluzioni, e il valore t_2 per cui non ha alcuna soluzione.

(C) (3 punti) Esibire tutte le soluzioni del sistema per $t = t_1$

(D) (3 punti) Esibire $\mathrm{Ker}\,(A_{t_2})$ e provare che $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(A_{t_2}) \oplus \mathrm{Im}\,(A_{t_2})$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî $X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ e $Y = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che i vettori assegnati come generatori di X ne costituiscono una base $\mathcal{B}$ ed esibire il vettore v di X tale che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di X.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di Y.

(D) (3 punti) Esibire $X \cap Y$ e calcolare la dimensione di $X + Y$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/9/13 — Quesiti

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. Al più 6

2. Tra 5 e 9

3. $\begin{pmatrix} -17 & -7 \\ 52 & 21 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

5. 25 e -55

6. $15\sqrt{2}$

7. $-31e_1 - 38e_2 + 13e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\det(A_{-1}) = -3$; $x = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

(B) $t_1 = -2$, $t_2 = 2$

(C) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con $s \in \mathbb{R}$

(D) $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -44$

2.

(A) Sono linearmente indipendenti; $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ -16 \\ -27 \end{pmatrix}$

(B) $X = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 10 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

(C) $Y = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}\right)$

(D) $X \cap Y = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$; dimensione 3