UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/1/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A) = 5$, $\det(A) = -24$ e A ha l'autovalore -2, quali sono gli altri autovalori?

2. Per quali k in $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^2+k-3 & k-3 \\ -k^2-2k+15 & 15-2k \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ ortogonali a $(1-i)e_1+(3+i)e_2$, unitarî e aventi somma delle coordinate immaginaria pura.

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} k^2-1 & 5k+6 \\ k^2+6k & 2k+1 \end{pmatrix}$?

5. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la quadrica $x^2-y^2-5z^2+4xy+2tyz+2x+4z=0$ è un paraboloide iperbolico?

6. Considerando $\mathbb{R}^2$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare il punto all'infinito della retta in $\mathbb{R}^2$ passante per i punti $(1,2)$ e $(3,-1)$.

7. Intorno a quali punti del piano il luogo di equazione $x^2y+8x+y^2=12$ non è una curva?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/1/13 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 7 & k-2 & -4k-12 \\ 4-k^2 & k^2+k-1 & 2k^2-8 \\ 1 & 0 & -2k-1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A_k) = -2k^4 - 5k^3 + k^2 - 5k + 3$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A_k}(1) = 2k^4 + 4k^3$ determinare $p_{A_k}(t)$.

(C) (2 punti) Sapendo che A_k ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = k^2 + 1$ trovare gli altri autovalori.

(D) (3 punti) Trovare i valori di k per cui A_k ha autovalori con molteplicità algebrica maggiore di 1.

(E) (3 punti) Trovare i valori di k per cui A_k non è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha(u) = \begin{pmatrix} \sin(\pi \cdot u) \\ u^2 \\ \ln(1+u) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il dominio I di α e provare che su I la α è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α in $u = 0$.

(C) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α in $u = 0$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}z$ e $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$

Risposte

5. ♢

1. 4 e 3

2. $k \neq -4$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $k = 2$ e $k = -3$

5. $t = -5$

6. $[2 : -3 : 0]$

7. $(2, -2)$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Sottraendo alla terza colonna $2k+1$ volte la prima si trova $\det\begin{pmatrix} k-2 & 10k-5 \\ k^2+k-1 & -2k^3+k^2+8k-4 \end{pmatrix}$ e i conti ora sono facili

(B) $t^3-(k^2-k+5)t^2+(-k^3+2k^2-6k+7)t+2k^4+5k^3-k^2+5k-3$

(C) $\lambda_2 = k+3$, $\lambda_3 = 1-2k$

(D) $k=-2$, $k=-1$, $k=-\frac{2}{3}$, $k=0$, $k=2$

(E) $k=-2$, $k=-1$, $k=-\frac{2}{3}$, $k=0$

2.

(A) $I=(-1,+\infty)$; $Z'(t)>0$ per ogni t, dunque Z è crescente

(B) $\kappa = \frac{\left(4+5\pi^2\right)^{1/2}}{(1+\pi^2)^{3/2}}$, $\tau = \frac{2\pi^3+4\pi}{4+5\pi^2}$

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{4+9\pi^2+5\pi^4}}\begin{pmatrix} \pi \\ 2+2\pi^2 \\ -\pi^2 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{4+5\pi^2}}\begin{pmatrix} -2 \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$

(D) $\ln(2)-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{\pi}$