UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 7/6/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dati 7 generatori di $V = \{v \in \mathbb{C}^5 : \ iz_1 + 5z_4 = 2z_2 + (1-i)z_3 + z_5\}$,
quanti bisogna scartarne per ottenere una base di V?

2. Trovare $v \in \mathbb{R}^2$ sapendo che per $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v \right)$ si ha $\left[\begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Posto $V = \{x \in \mathbb{R}^8 : \ 7x_3 = 9x_7\}$, se W e Z sono sottospazî di V,
con $\dim(W) = 3$ e $W + Z = V$, che dimensione può avere Z?

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (1+t)x - 3ty = 1 + 4t \\ (t-4)x + (2+t)y = t - 8. \end{cases}$

5. Date $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sapendo che $\det(A) = 1$ e $\det(B) = 2$,
si può concludere che $\det(A + B) = 3$? Giustificare la risposta.

6. In una matrice 5×9, quante sono le orlate di una sottomatrice 3×3?

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 7/6/14 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare $X : \begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$ $\quad Y = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

(A) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di X.

(B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di Y.

(C) (3 punti) Determinare $X \cap Y$ e dedurne la dimensione di $X + Y$.

(D) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ è una base di X.

(E) (1 punto) Provare che $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$ è una base di Y.

(F) (3 punti) Data $f : X \to Y$ lineare con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ calcolare $f\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Considerare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot x$.

(A) (2 punti) Provare che f è surgettiva e dedurne la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$.

(B) (2 punti) Provare che esiste unica $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ lineare tale che
$g(e_1) = 2e_2 + e_3 - e_4, \quad g(e_2) = e_1 - 3e_3 + e_4$.

(C) (2 punti) Calcolare il rango di $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

(D) (3 punti) Determinare $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $(f \circ g)(y) = A \cdot y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^2$.

(E) (3 punti) Calcolare A^{-1}.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. 3

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Tra 4 e 7 compresi

4. Infinite per $t = 2$, nessuna per $t = \frac{1}{4}$, una altrimenti

5. No; per $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha che $\det(A) = 1$ e $\det(B) = 2$, mentre $\det(A + B) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$

6. 12

7. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -43 \\ 23 \\ -37 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) Span $\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

(B) $\begin{cases} x_1 + 17x_2 + 29x_3 = 0 \\ 13x_2 + 23x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(C) Span $\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, dunque $X + Y$ ha dimensione $2 + 2 - 1 = 3$

(D) $\mathcal{B}$ consiste di due vettori linearmente indipendenti di X

(E) $\mathcal{C}$ consiste di due vettori linearmente indipendenti di Y

(F) $\begin{pmatrix} -23 \\ 15 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}$

2.

(A) Le prime due colonne della matrice di f sono una base di $\mathbb{R}^2$; il nucleo di f ha dimensione 2

(B) g è assegnata su una base

(C) 2

(D) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 15 & -17 \end{pmatrix}$

(E) $-\frac{1}{38}\begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$