Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 27/1/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se sono date $g : X \to Y$ lineare invertibile, una base $\mathcal{A}$ di X e una base $\mathcal{B}$ di Y, conoscendo det $\left([g]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\right)$, è possibile calcolare det $\left([g^{-1}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\right)$? Giustificare la risposta.

2. Data la base $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 + e_3,\ -3e_1 + 3e_2 + 2e_3)$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0\}$, determinare $[11e_1 - e_2 + e_3]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $A = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e $B = ((1 + 2i)v_1 + 2v_2,\ (1 + i)v_1 + (1 - 3i)v_2)$, sapendo che $\det(A) = 2 - i$ calcolare $\det(B)$.

4. Dato il polinomio $p(z) = 3z^3 + (7i - 1)z^2 - (5 + 2i)z + 1 - i$, sapendo che $p(-i) = 0$ trovare tutte le radici di $p(z)$ con le loro molteplicità.

5. Se $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^4$ è lineare e $f(e_1 + ie_3 + (2 - i)e_6) = (5 - i)e_2 + e_4$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

6. Risolvere $\begin{cases} x - y + z = -3 \\ 4x + y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = 10. \end{cases}$

7. Calcolare la proiezione su X di $8e_1 - 3e_2 + 4e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$ dove $X = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_3 + e_4,\ e_2 + 3e_3 - e_4)$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + e_4,\ 4e_1 - e_2 - e_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 27/1/14 — Esercizî

1. Considerare $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$, $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
$u_1(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 1-2t \\ 1-8t \end{pmatrix}$, $u_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 4-t \\ 12-t \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$, e le applicazioni lineari $g : W \to \mathbb{R}^2$ tali che
$g(u_1(t)) = \begin{pmatrix} t+4 \\ 4-5t \end{pmatrix}$ e $g(u_2(t)) = \begin{pmatrix} 2-3t \\ 2t \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

(B) (2 punti) Provare che $\mathcal{A}$ è una base di W e che $u_1(t)$ e $u_2(t)$ appartengono a W per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(C) (4 punti) Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ quante g esistono.

(D) (2 punti) Trovare il valore di t per cui g esiste ed è unica ma non è invertibile.

(E) (3 punti) Per $t = -1$ trovare $[g]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t : \begin{cases} 3(t+1)x - ty + (t+3)z = 2(t+1) \\ (4-t)x + 4(t+1)y + (3t+4)z = 2-t \end{cases} \qquad F_s = \begin{pmatrix} s-2 \\ s \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} s-3 \\ s-1 \\ s+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s-3 \\ s-4 \\ 1-s \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Trovare $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_t)$ valga m_0 per $t = t_0$ e m_1 per $t \neq t_0$.

(B) (2 punti) Trovare $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(F_s)$ valga n_0 per $s = s_0$ e n_1 per $s \neq s_0$.

(C) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = 1$ e per $t = t_0$.

(D) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_s per $s = 0$ e per $s = s_0$.

(E) (2 punti) Discutere la posizione reciproca di E_1 ed F_0.

(F) (2 punti) Discutere la posizione reciproca di E_0 ed F_1.

Risposte

5. ♡

1. Sì, $\det\left([g^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right) = \frac{1}{\det\left([g]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)}$

2. $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. $7 - 11i$

4. Radice $-i$ con molteplicità 2 e radice $\frac{1}{3}(1-i)$ con molteplicità 1

5. Tra 2 e 5 compresi

6. $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

7. $2e_1 - e_2 + e_3 + 3e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) I vettori che costituiscono $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti

(B) Sia i vettori che costituiscono $\mathcal{A}$ sia $u_1(t)$ e $u_2(t)$ soddisfano l'equazione di W; inoltre i vettori che costituiscono $\mathcal{A}$ sono linearmente indipendenti

(C) Infinite per $t = 2$, nessuna per $t = -\frac{2}{3}$, una sola altrimenti

(D) $t = \frac{4}{13}$

(E) $\begin{pmatrix} 219 & 100 \\ -125 & -57 \end{pmatrix}$

2.

(A) $m_0 = 2$, $m_1 = 1$, $t_0 = -2$

(B) $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $s_0 = 3$

(C) $E_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ -17 \end{pmatrix}$

$E_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(D) $F_0 :\ y + 3z = 4$

$F_3 :\ \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$

(E) Incidenti nel punto $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(F) Paralleli tra loro