ETA 10/12/13-bis

$$\delta_n : C^n(G) \longrightarrow C^{n+1}(G)$$

$$\shortparallel$$

$$\mathrm{Hom}(C_n, G) \qquad \delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$$

Definisco: $Z^n(G) = \mathrm{Ker}(\delta_n^G)$ cocicli

$B^n(G) = \mathrm{Im}(\delta_{n-1}^G)$ cobordi

$H^n(C, G) = Z^n / B^n$ – coomologia

"<u>Teo</u>": $H_*(C)$ determina $H^*(C;G)$ —

$G = \mathbb{Z}$

Caso ogni C_n è finitamente generato (libero);
visto: $(C_n, \partial_n)_{n=0}^{+\infty}$ è $\bigoplus$ di

$$E(m): \quad 0 \to 0 \cdots \to 0 \to \overset{m}{\mathbb{Z}} \to 0 \to 0 \cdots$$

$$D(m,k): \quad 0 \to \overset{m+1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{k\cdot} \overset{m}{\mathbb{Z}} \to 0 \cdots$$

$$H_n(E(m)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad H_n(D(m,k)) = \begin{cases} \mathbb{Z}/k & n=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio: $H^*(C \oplus C'; G) \cong H^*(C; G) \oplus H^*(C'; G)$

Dualizzo $E(n)$ e $D(n,k)$

$E(n)$:
$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & n & & & \\ C^* & \dots 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 & \leftarrow & \dots \\ H^* & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \end{array}$$

$D(n,k)$:
$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & n+1 & & & n & & & \\ C^* & \dots \leftarrow & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{k\cdot} & & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 & \leftarrow \dots \\ H^* & \dots \leftarrow & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}/k & \leftarrow & & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow \dots \end{array}$$

Abbiamo provato:

$$H_n(C) = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/p_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k$$

$$H_{n-1}(C) = \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/q_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/q_\ell$$

$$\Longrightarrow H^n(C;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/q_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/q_\ell \; .$$

<u>Fatto</u>: H^* ha struttura algebrica più ricca di H_* .

<u>Oss</u>: $\mathbb{Z}^r = \mathrm{Hom}(H_n(C), \mathbb{Z})$.

Lem: $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ esatta

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(A,G) \xleftarrow{i^*} \mathrm{Hom}(B,G) \xleftarrow{p^*} \mathrm{Hom}(C,G) \longleftarrow 0$ esatta.

Dim: • $p^*(\gamma) = 0$ cioè $\gamma(p(b)) = 0 \ \forall b \in B$

ma $p : B \twoheadrightarrow C \Rightarrow \gamma = 0$; $p^* : \hookrightarrow$

• $i^* \circ p^* = (p \circ i)^* = 0$

• $i^*(\beta) = 0$ cioè $\beta(i(a)) = 0 \ \forall a \in A$;

definisco $\gamma : C \to G$ scegliendo

$\gamma(c) = \gamma(b)$ con $b \in p^{-1}(c)$ a caso ;

ben def. perché se $b, b' \in p^{-1}(c)$ ho

$b - b' \in \ker p \Rightarrow b - b' = i(a) \Rightarrow \gamma(b) - \gamma(b') = 0$.

Chiaro che $\beta = p^*(\gamma)$. $\boxtimes$

Esempio:
$G = \mathbb{Z}$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{k\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k \to 0$$

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{k\cdot} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0$$

non esatta qui (lì non è surj.)

Def: Se $0 \to K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} A \to 0$ risoluzione libera del gruppo abeliano A ho

$$0 \leftarrow Hom(K,G) \xleftarrow{i^*} Hom(H,G)$$

e pongo $Ext(A;G) = Hom(K,G)/_{\mathrm{Im}\, i^*}$.

<u>Thm</u>: E' ben definito (non dipende da risoluz.).

<u>Dim</u>: Siano $0 \to K_0 \xrightarrow{i_0} H_0 \xrightarrow{p_0} A \to 0$

$0 \to K_1 \xrightarrow{i_1} H_1 \xrightarrow{p_1} A \to 0$.

Definisco k_{01}, h_{01} in modo che

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "k_{01}"] & H_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "h_{01}"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & H_1 \arrow[r, "p_1"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commuti.

Scelgo base libera di H_0; per x in tale base,

poiché p_1 è surgettiva, esiste $y \in H_1$ t.c.
$p_1(y) = p_0(x)$; scelgo allora $h_{01}(x) = y$ –

Scelgo base libera di K_0; per x in tale base ho
$p_1(h_{01}(i_0(x))) = p_0(i_0(x)) = 0$
$\Rightarrow h_{01}(i_0(x)) \in \mathrm{Ker}(p_1) = \mathrm{Im}(i_1)$
$\Rightarrow$ posso scegliere $y \in K_1$ t.c.
$$i_1(y) = h_{01}(i_0(x))$$
e pongo $k_{01}(x) = y$ – Dualizzando:

$$\begin{tikzcd}
0 & \mathrm{Hom}(K_0,G) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(H_0,G) \arrow[l, "i_0^*"'] & \mathrm{Hom}(A,G) \arrow[l, "p_0^*"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Hom}(K_1,G) \arrow[l] \arrow[u, "k_{01}^*"'] & \mathrm{Hom}(H_1,G) \arrow[l, "i_1^*"'] \arrow[u, "h_{01}^*"'] & \mathrm{Hom}(A,G) \arrow[l, "p_1^*"'] \arrow[u, equal] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

commutativo, da cui $k_{01}^*(\mathrm{Im}\, i_1^*) \subset \mathrm{Im}(i_0^*)$

$\Rightarrow k_{01}^*$ definisce una

$$\mathrm{Hom}(K_1,G)\Big/\mathrm{Im}(i_1^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K_0,G)\Big/\mathrm{Im}(i_0^*).$$

Facendo al contrario ho

$$k_{10} : K_1 \to K_0 \qquad h_{10} : H_1 \to H_0$$

e k_{10}^* induce:

$$Hom(K_0, G)\big/ Im(\partial_0^*) \to Hom(K_1, G)\big/ Im(\partial_1^*)$$

Fatto: le due mappe trovate sono inverse una dell'altra. (Non è affatto vero che k_{01}/k_{10} e h_{01}/h_{10} sono inverse una dell'altra. ES:

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$$
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}.$$

$1 \mapsto (1,0)$ $\quad$ $(0,1) \mapsto 1$, $(1,0) \mapsto 0$ $\quad$ $\square$

<u>Thm</u>: esiste una successione esatta corta funtoriale

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C);G) \to H^n(C;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C);G) \to 0.$$

Inoltre essa splitta ma non funtorialmente.

Cioè:

$$H^n(C;G) \cong \underline{\mathrm{Hom}(H_n(C);G)} \oplus \underline{\mathrm{Ext}(H_{n-1}(C);G)}.$$

non canonicamente. atteso sorprese

(Teorema dei coeff universali per coomologie.)

<u>Dim</u>: Definisco $h_n : H^n(C;G) \to Hom(H_n(G);G)$

come
$$\big(h_n([\varphi])\big)[u] := \varphi(u)$$

$$\varphi \in Z^n \subset C^n = Hom(C_n;\mathbb{Z}) \qquad u \in Z_n \subset C_n$$

Ben definite:

- indipendenza da u: $\quad u' = u + \partial_{m+1} w$

$$\Rightarrow \varphi(u') = \varphi(u) + \varphi(\partial_{m+1} w) = \varphi(u) + \underbrace{\delta_m \varphi}_{=0}(w)$$

- indipendenza da φ; $\quad \varphi' = \varphi + \delta_{m-1}\psi$

$$\Rightarrow \varphi'(u) = \varphi(u) + \delta_{m-1}\psi(u) = \varphi(u) + \psi(\underbrace{\partial_m u}_{=0})$$

- h_m surgettiva $\quad h_m : H^m(C;G) \to \mathrm{Hom}(H_m(C);G)$

Sia $\eta : H_m(C) \to G$; componendo con

$Z_n \to H_n$ ho $\bar{\eta} : Z_n \to G$; poiché C_n è libero posso estendere $\bar{\eta}$ a $\bar{\bar{\eta}} : C_n \to G$; ove

$$(\delta_n \bar{\bar{\eta}})(\underset{\substack{\cap \\ C_{n+1}}}{w}) = \bar{\bar{\eta}}(\underbrace{\partial_{n+1} w}_{\substack{\cap \\ B_n}}) = \bar{\eta}(\partial_{n+1} w) = 0$$

$$\Rightarrow \eta = h_n([\bar{\bar{\eta}}]) -$$