# ETA - 24/10/13

$f: M \to N$ $C^\infty$ $y \in N$ regolare se $d_x f: T_x M \twoheadrightarrow T_y N$ $\forall x \in f^{-1}(y)$

$M$ con $\partial M$ ; $f: M \to N$ ; $y \in N$ reg. se lo è per
$\partial N = \emptyset$ $\quad f|_{M \setminus \partial M}$ e $f|_{\partial M}$

In tal caso $f^{-1}(y)$ sottovar. propr. embedded di $M$.

Inoltre $M, N$ orientate $\Rightarrow f^{-1}(y)$ orientato e

$$\partial(f^{-1}(y)) = (f|_{\partial M})^{-1}(y)$$

orientato come bordo di $f^{-1}(y)$:
$f^{-1}(y)$ orientato e regola ONF

orientato perché $f|_{\partial M} : \partial M \to N$ or

ori ONF

orientaz. coincidono

Lem (Sard): i valori non regolari di $f: M \to N$

- hanno misura nulla (misura di Lebesgue nulla in ogni carta)
- magro (unione numerabile di insiemi con chiusura che ha parte interna $\emptyset$)

$\Longrightarrow$ i valori regolari sono densi in $N$.

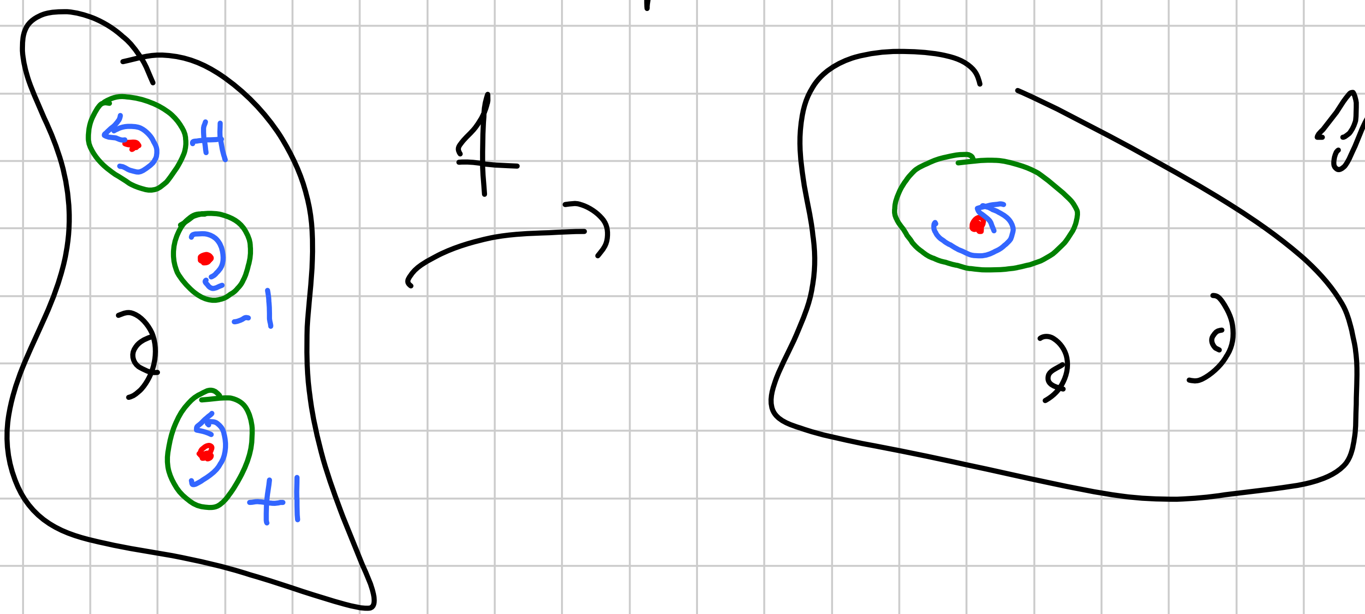
Def: Se $M^{(n)}, N^{(n)}$ sono orientate e $f: M \to N$ $C^\infty$ preso $y \in N$ valore regolare chiamo grado di $f$ (in $y$)

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sgn}(x)$$

($f^{-1}(y)$ è 0-sottovar orientata:

$$\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(\underbrace{\det(d_x f)}_{\text{non definito}}))$$

(uso carte ori) ben def



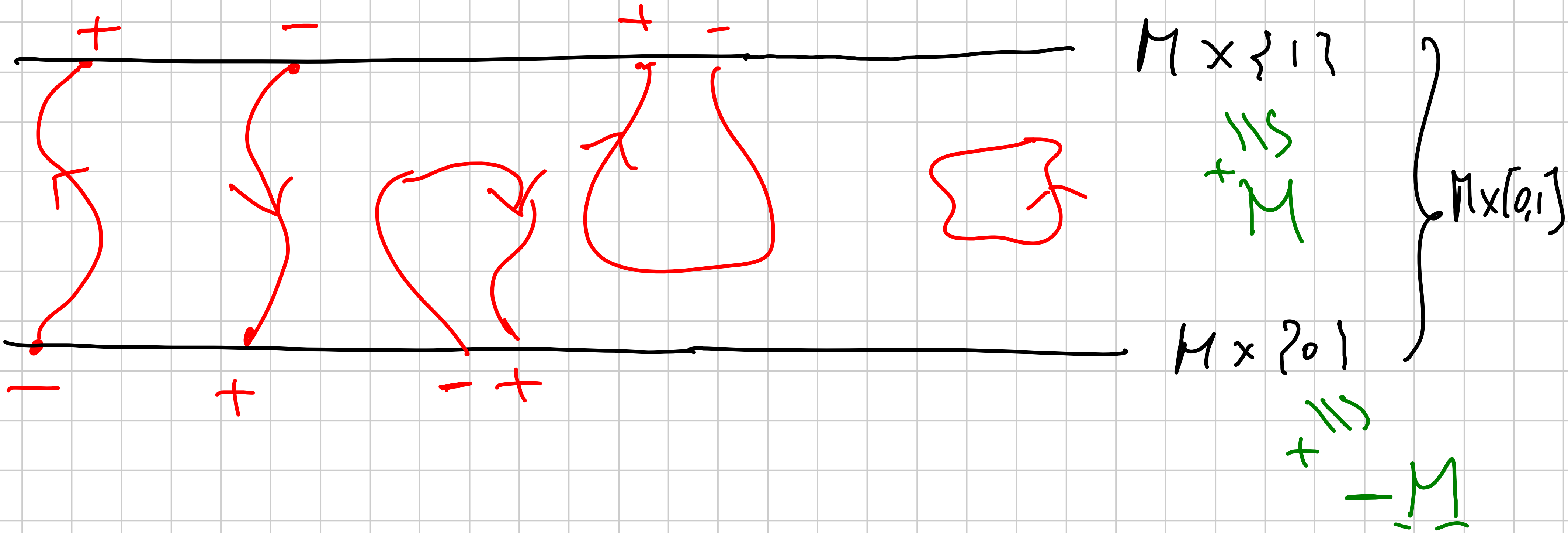

<u>Oss</u>: per ora $M, N$ cpt (si estende a $f$ propria) _

**Teo**: Se $N$ è connesso, $\deg(f,y)$ non dipende da $y$;
inoltre $f_0 \underset{C^\infty}{\simeq} f_1 \Longrightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$.

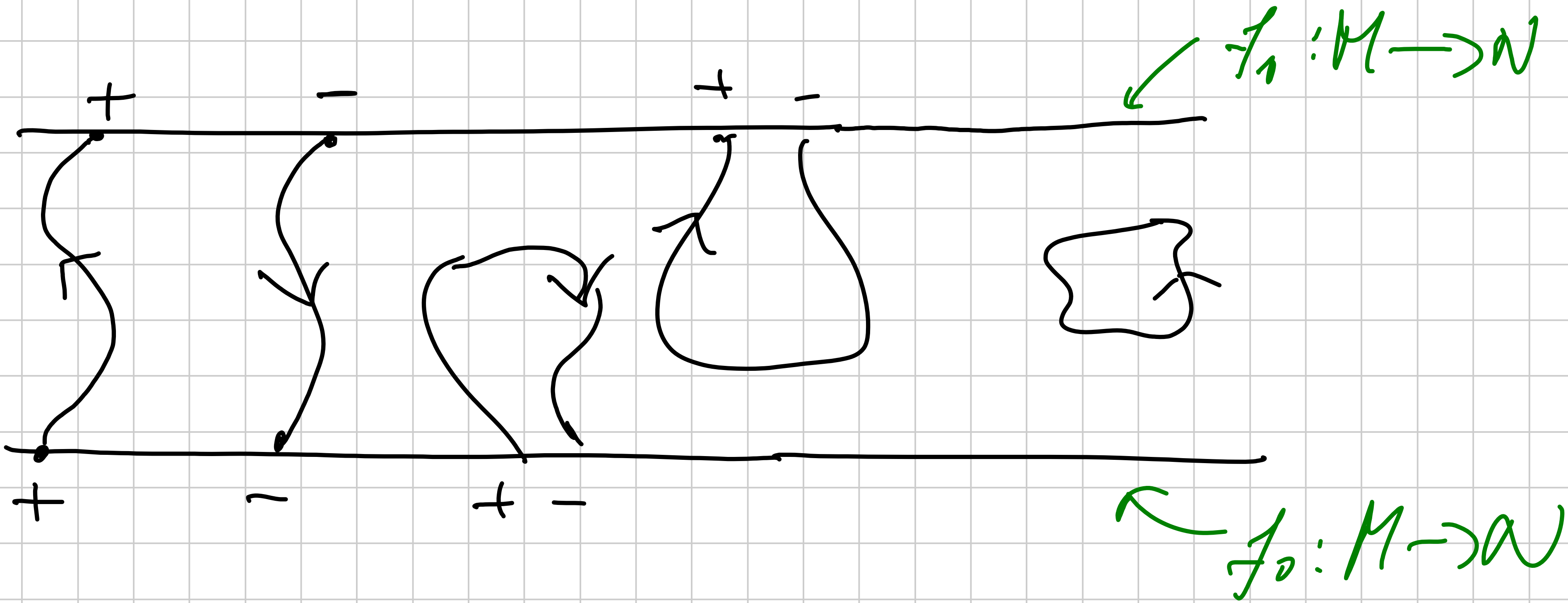
**Dim**: L'insieme dei valori regolari è aperto
(complementare è $f(\{x : \det(d_x f) = 0\})$).
Inoltre $\deg(f,y)$ è localmente costante
(se $y$ è reg. $\exists V \in \mathcal{U}(y)$ t.c.
$f^{-1}(V) = W_1 \cup \dots \cup W_k$ con $f|_{W_j} : W_j \xrightarrow{\simeq} V$).
$\Longrightarrow$ su $V$ deg è costante.

<u>Claim</u>: $f_0, f_1 : M \longrightarrow N$ omotope, $y$ reg. per $f_0$ e $f_1$
$\Longrightarrow \deg(f_0, y) = \deg(f_1, y)$. Infatti: ho
$F : M \times [0,1] \longrightarrow N$ con $F(\cdot, i) = f_i \quad i=0,1$.
$\exists$ valori regolari di $F$ sono quasi denso + deg. loc. cost.
$\Longrightarrow$ wlog $y$ valore regolare per $F$

$F^{-1}(y)$ 1-sottovar. orientata di $M \times [0,1]$ con
$$\partial(F^{-1}(y)) = \left(F|_{M \times \{0,1\}}\right)^{-1}(y) \leftarrow \text{orient. compatibili}$$



+
−
+
−
M × {1}
≅ +M
M×[0,1]
−
+
− +
M × {0}
≅ +−M

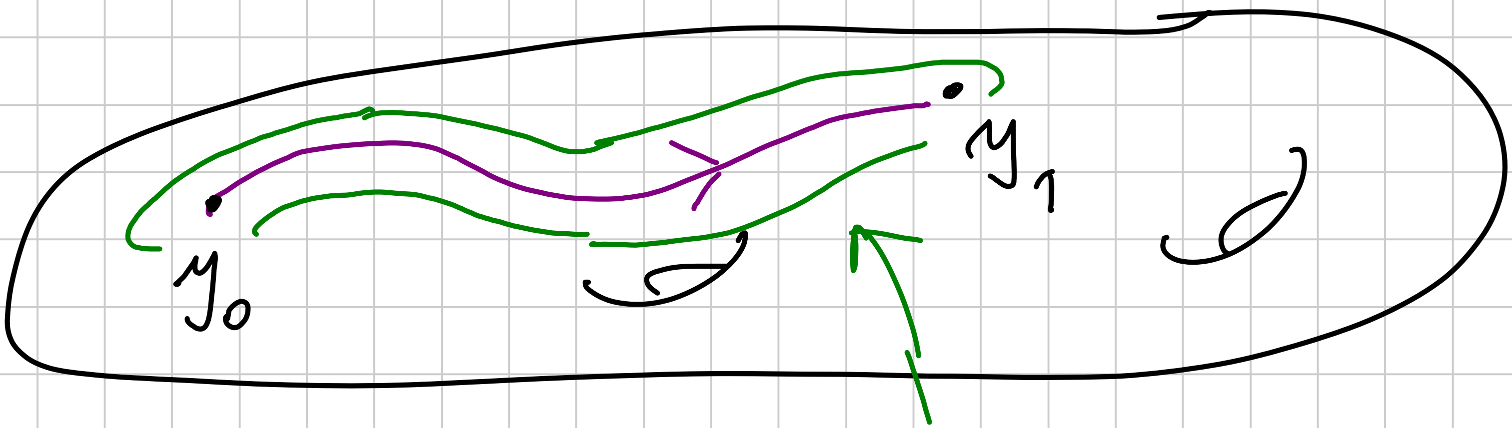


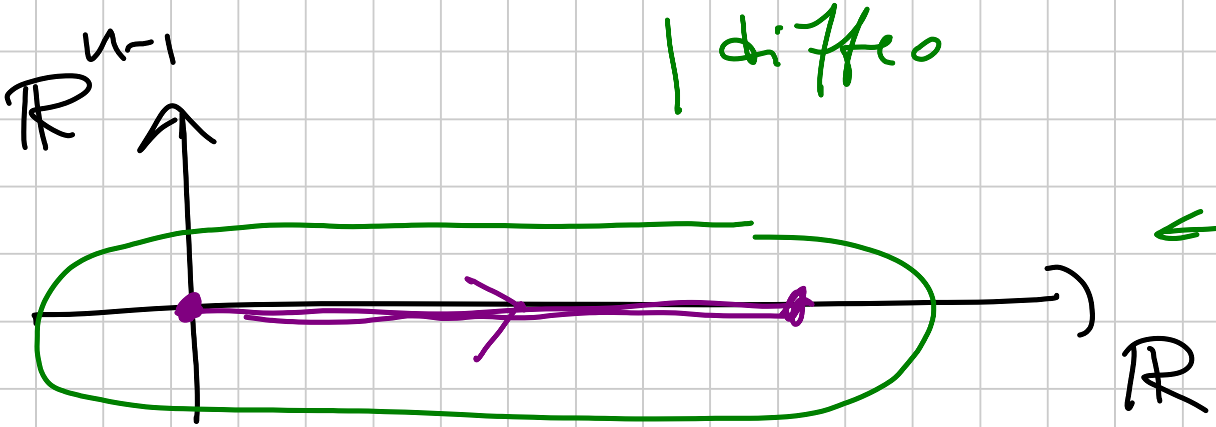

$$\Rightarrow \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(x) = \sum_{x \in f_0^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(x)$$

Claim: Dati $y_0, y_1 \in N$ (connessa) esiste una isotopia $H : N \times [0,1] \to N \times [0,1]$ diffeo

$$(y, t) \longmapsto (h_t(y), t)$$

t.c. $h_0 = id$ $h_1(y_0) = y_1$.






claim vero quindi.

Conclusione: $y_0, y_1$ reg. per $f$; $h_t$ come nel claim

$$\deg(h_1 \circ f, h_1(y_0)) = \deg(h_1 \circ f, y_1)$$

$$\deg(f, y_0) \qquad\qquad \deg(f, y_1). \qquad \blacksquare$$

**Prop:** "Il grado liscio coincide con il grado PL".

Formalmente:

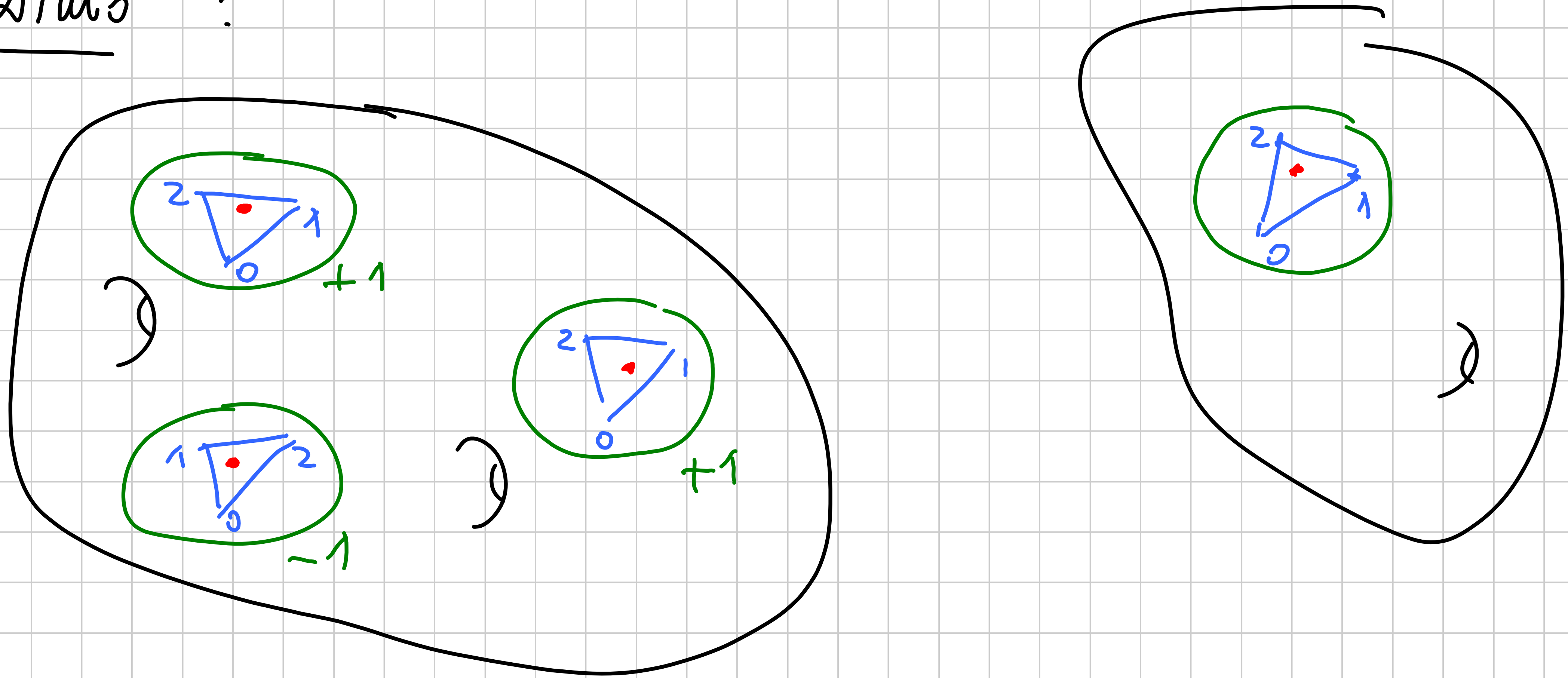
$$\begin{tikzcd}
M^{C^\infty} \arrow[r, "f^{C^\infty}"] \arrow[d, "\cong_T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N^{C^\infty} \arrow[d, "\cong_T"] \\
M^{PL} \arrow[r, "f^{PL}"] & N^{PL}
\end{tikzcd}$$

solo omeo

non dif (usa $H_*$)

$\Rightarrow \deg(f^{C^\infty}) = \deg(f^{PL})$

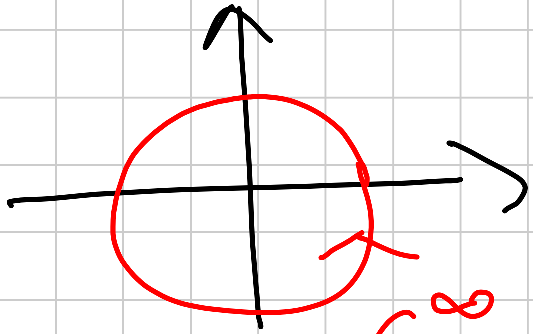
"Dimo" :

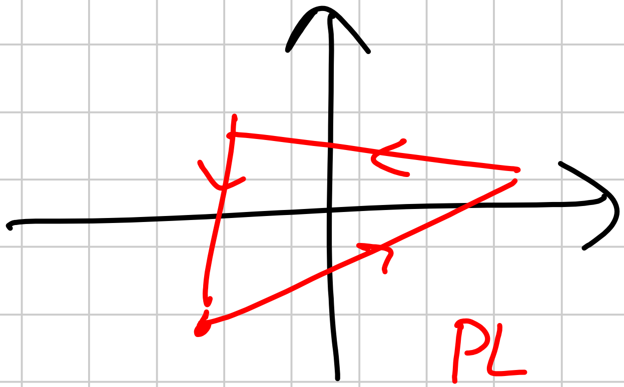


Parto da $f$ liscia; noto che $f^{-1}$(vertici di simplesso molto piccolo)

in ogni $W_j$ sono vertici di un simplesso;
modifico $f$ / omotopie in modo che sia simpliciale su tali simplessi senza modificarla sui vertici. Orientazioni compatibili con i segni di $\det(d_{x_j} f) \Longrightarrow \dots$ "$\boxtimes$"

$S^1$




Teo: $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$; $f_0 \simeq f_1 \Longleftrightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$

Dim ($C^\infty$): $\Longrightarrow$ visto

$\Longleftarrow$: Sia $\deg(f_0) = \deg(f_1) \neq 0$.

Ho $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ e voglio estenderle a

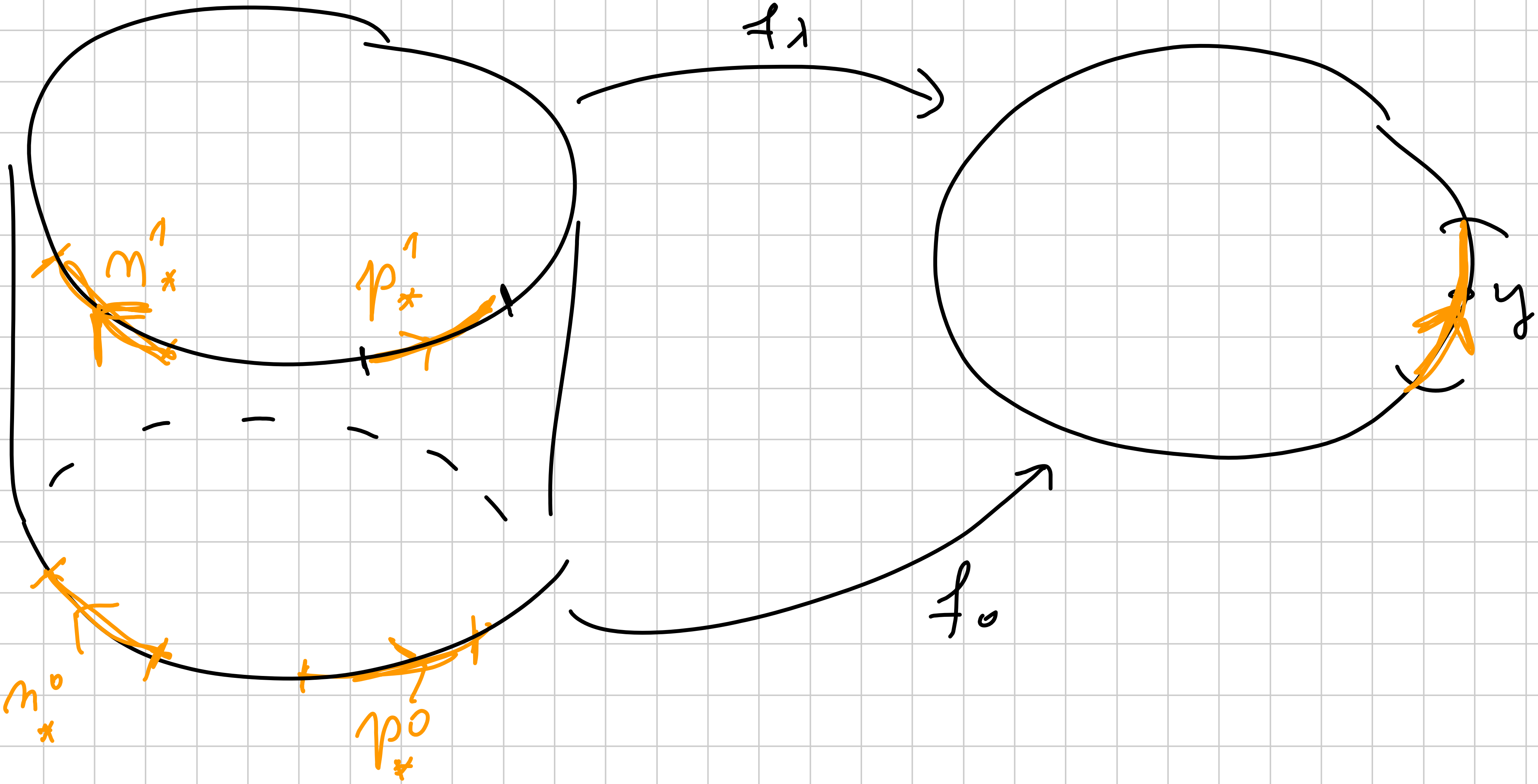
$F : S^1 \times [0,1] \to S^1$

Scelgo $y \in S^1$ valore regolare comune:

$$f_0^{-1}(y) = \{ p_1^0, \dots, p_k^0, n_1^0, \dots, n_h^0 \} \qquad sgn(p_*^i) = +1$$

$$f_1^{-1}(y) = \{ p_1^1, \dots, p_t^1, n_1^1, \dots, n_s^1 \} \qquad sgn(n_*^i) = -1$$

$$k - h = t - s \neq 0$$

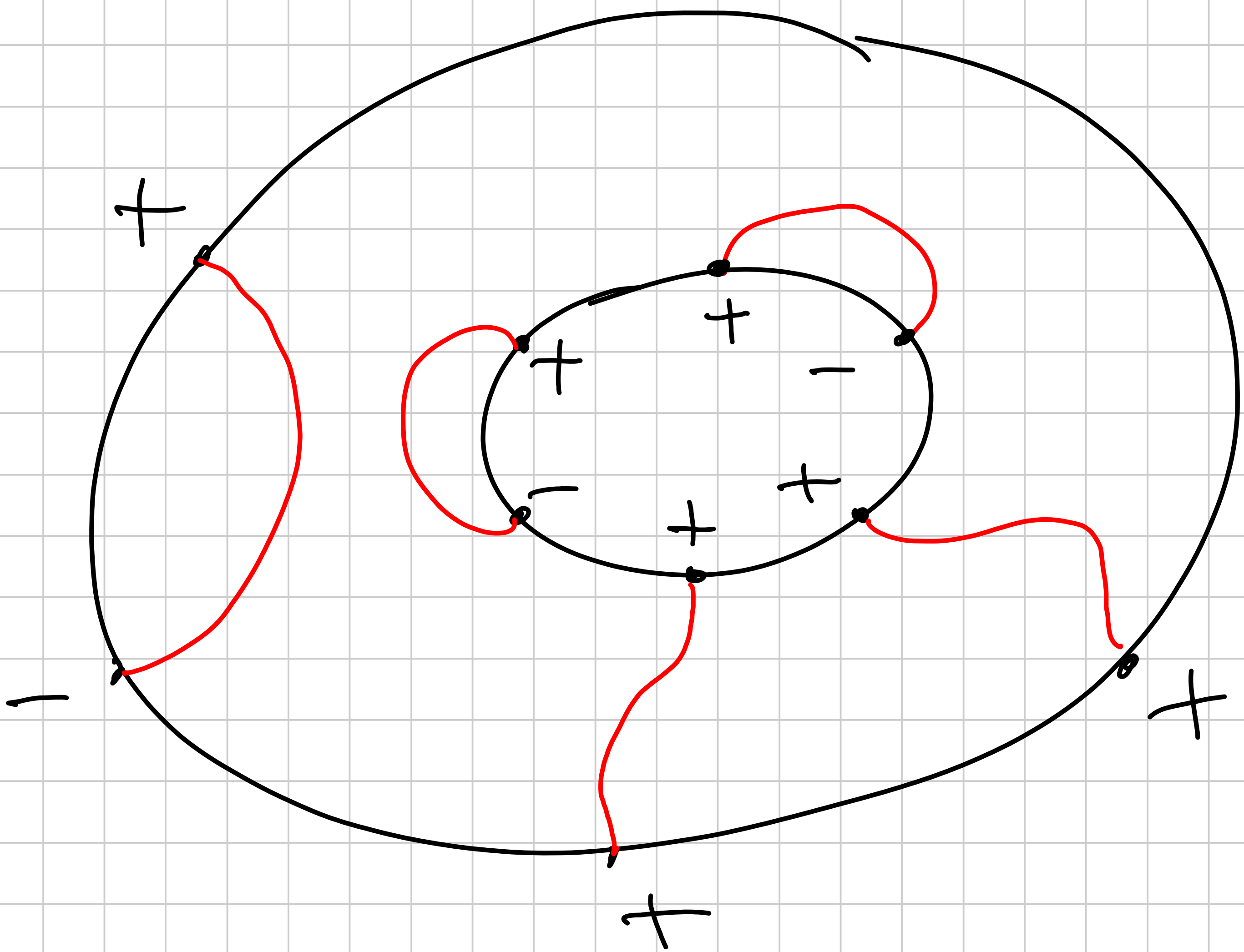

$f_1$
$f_0$
$m^1_*$
$p^1_*$
$m^0_*$
$p^0_*$
$y$

Esercizio in tali ipotesi posso trovare archi orient.

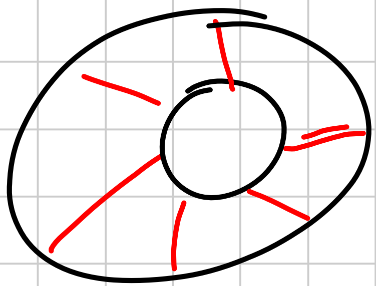
$\alpha_1, \dots, \alpha_N$ $\qquad N = \dfrac{k+h+t+s}{2}$ $\qquad$ t.c.

ogni $\partial\alpha_j$ sia o $p^1_* \cup p^0_*$ o $n^1_* \cup n^0_*$

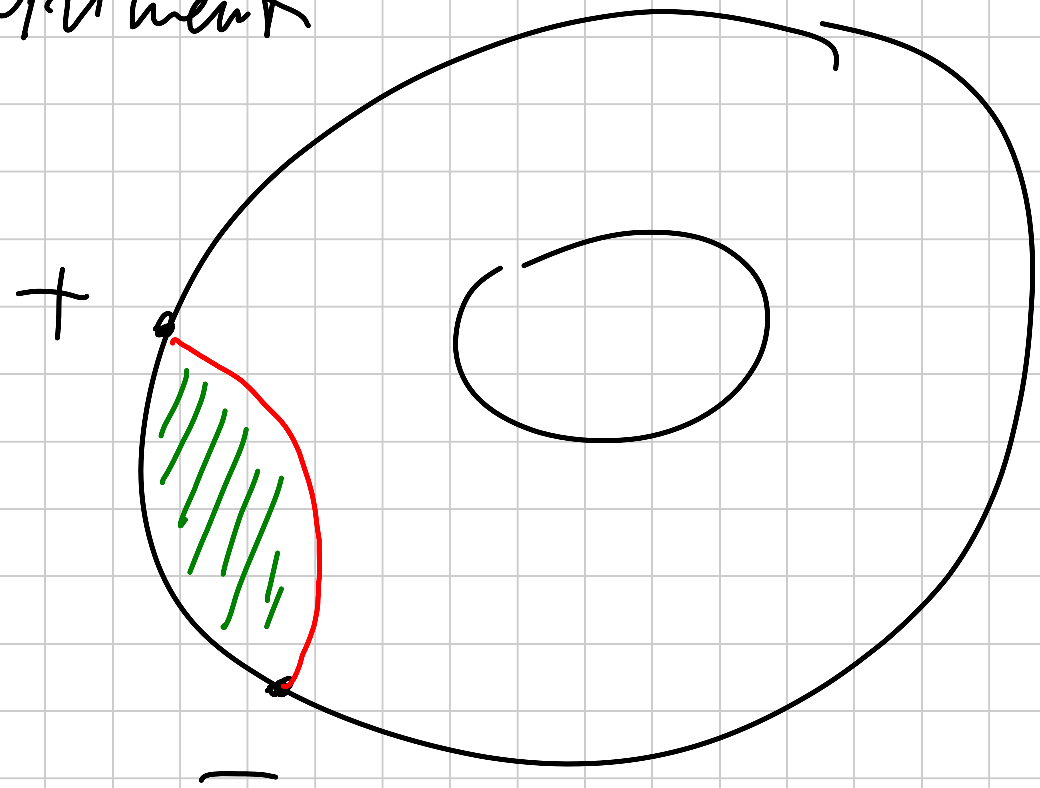
$p^1_* \cup m^1_* \qquad p^0_* \cup m^0_*$



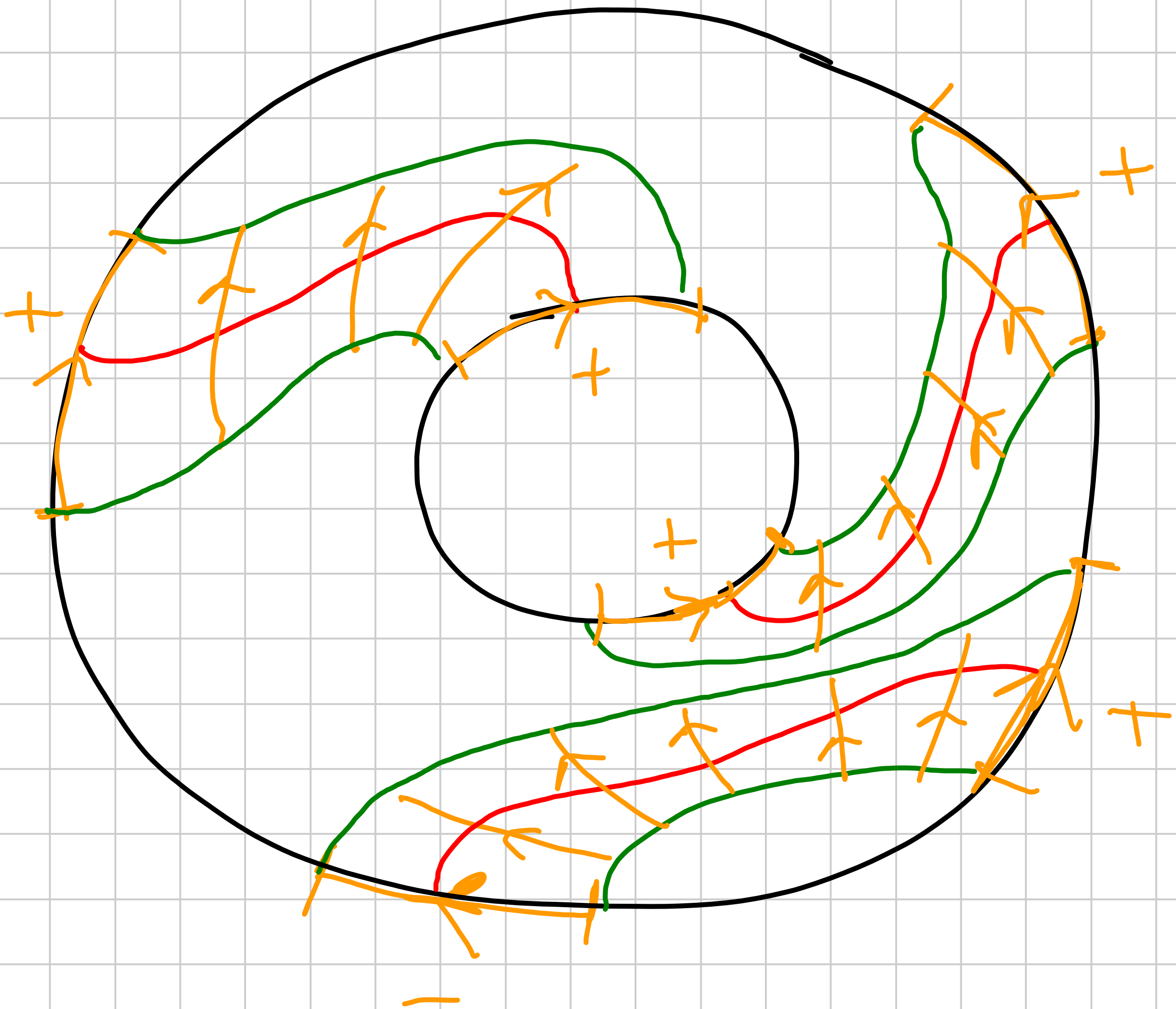

Idea: se
$h = s = 0$
oppure
$k = t = 0$
ovvio:

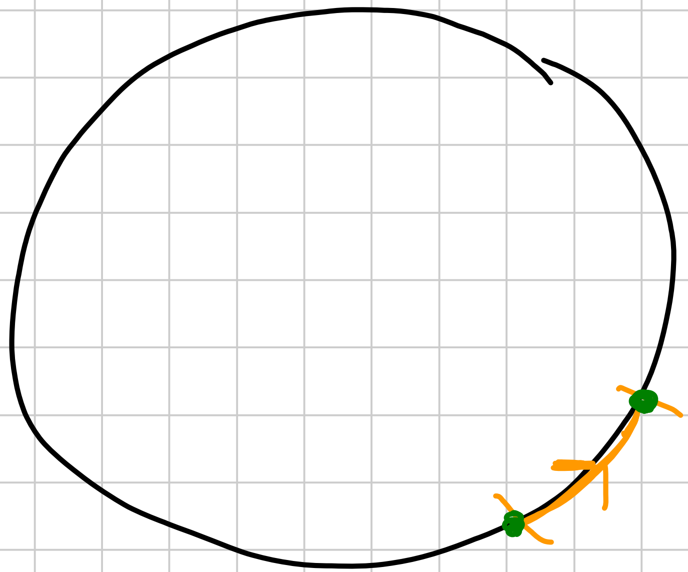


altrimenti



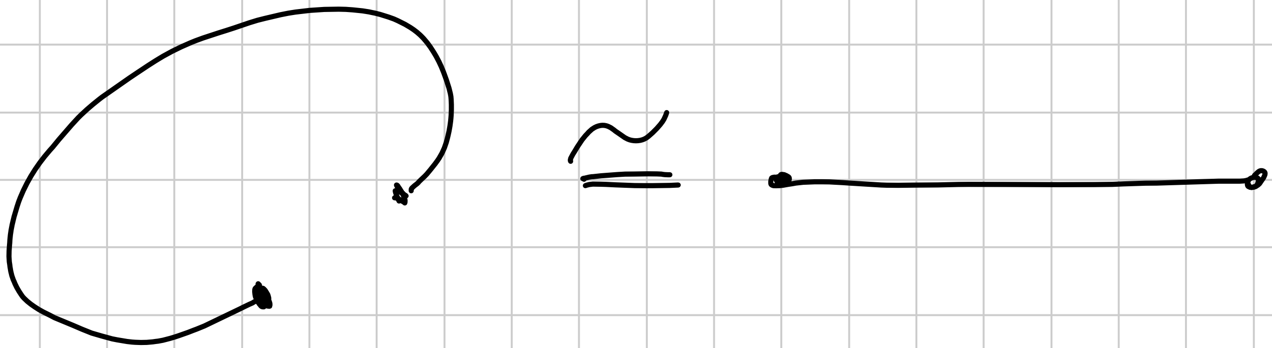

Lo uso (ho almeno un $\alpha_j$ che unisce $S^1 \times \{0\}$ con $S^1 \times \{1\}$):

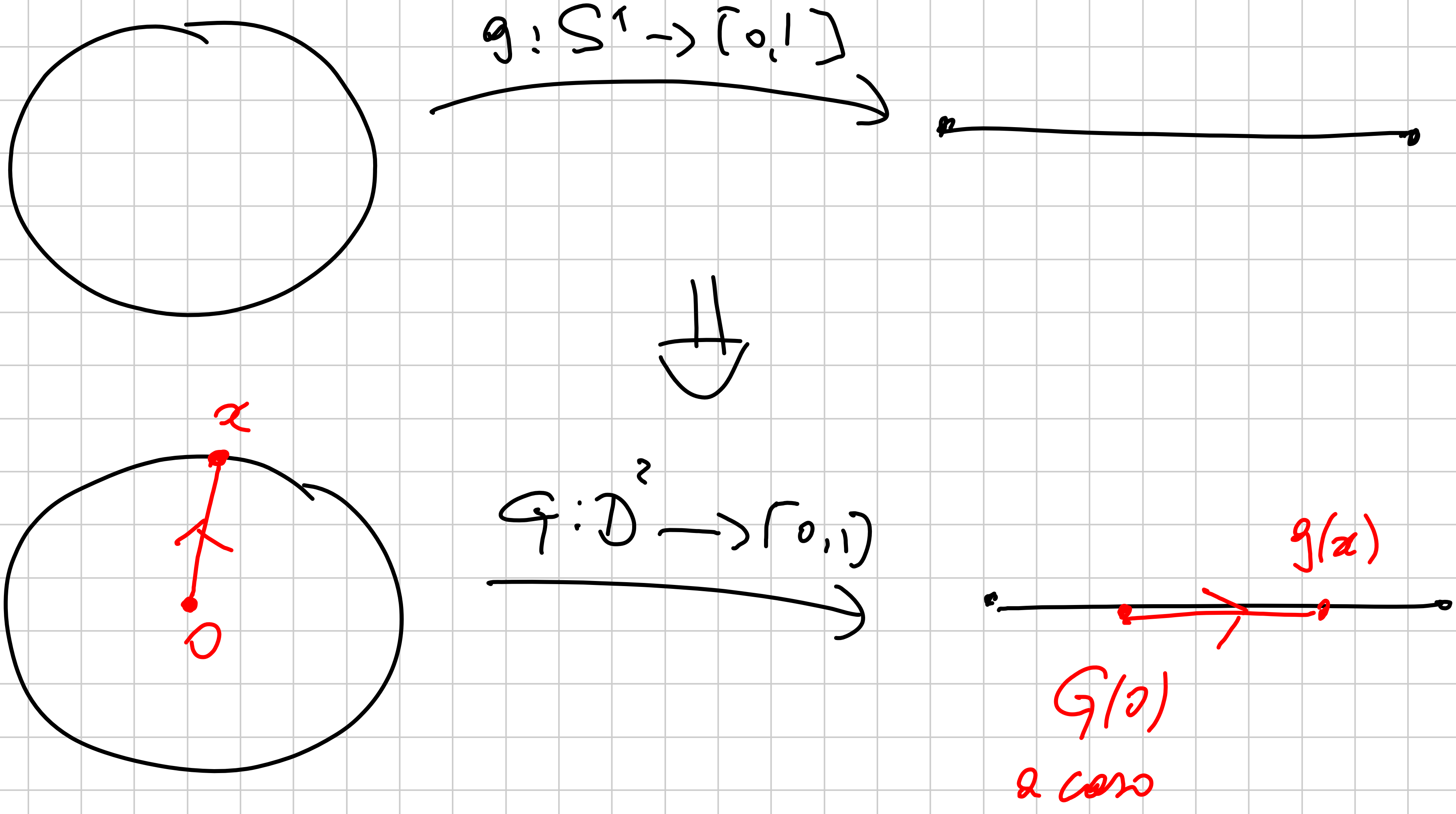




Prendo cantini intorno agli $\alpha_j$ e d
estendo $f_0 \sqcup f_1$ a loro

Resta da estendere a una unione di dischi sul cui bordo la F è già definita a valori in





g : S^1 -> [0,1]
G : D^2 -> [0,1]
x
O
g(x)
G(O)
a caso

Se $\deg(f_0) = \deg(f_1) = 0$ come sopra

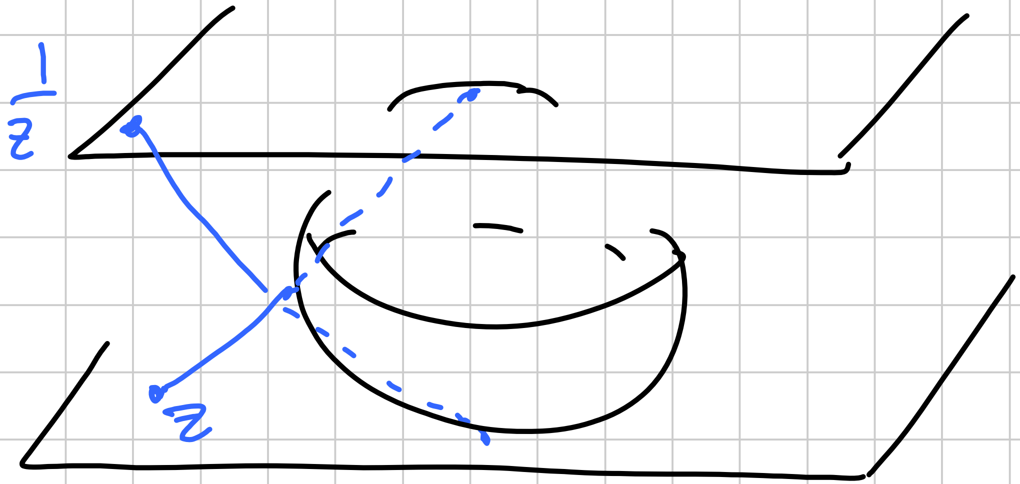
vedo che $f_0 \simeq \text{const}$, $f_1 \simeq \text{const}$ (esercizio). $\blacksquare$

---

<u>Teo fond dell'algebra</u>: $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non const ha radici.

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2 \qquad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z, 1] : z \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : w] : w \in \mathbb{C}\}$$

$$z \longleftrightarrow \frac{1}{z}$$




Wlog

$$p(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d$$

$$d > 0$$

$$f : S^2 \to S^2 \qquad f(z) = \begin{cases} p(z) & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty \end{cases}$$

Affermo che $f$ ha grado $d$ ; ciò basta

perché se $p(z)$ non avesse radici avrei
$0 \notin \operatorname{Im}(f)$ valore regolare $\Longrightarrow \deg(f) = 0$
(anzi $f \simeq$ cost).

Per vederlo analizzo $f$ vicino a $\infty$:
devo vedere vicino a $(\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ho

$$z \mapsto \frac{1}{p\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z^d} + a_1 \frac{1}{z^{d-1}} + \cdots + a_d} =$$

$$= \frac{z^d}{1 + a_1 z + \cdots + a_d z^d} \overset{loc}{=} \left( \frac{z}{\sqrt[d]{1 + \cdots}} \right)^d$$

$$\underset{\text{cambio variabile}}{\overset{\parallel}{u}}$$

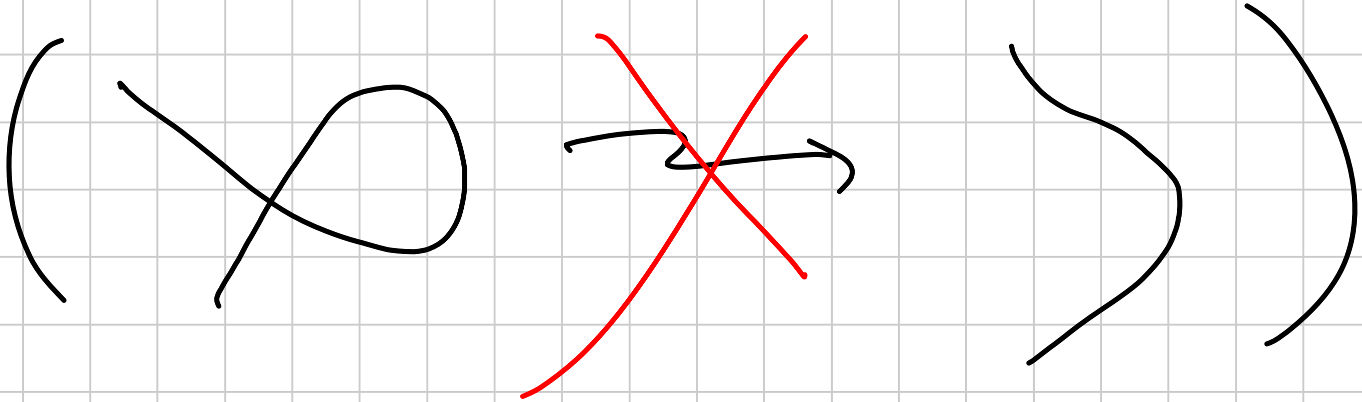
Ho la mappa $u \longmapsto u^d$ che ha grado $d$

($0$ non val sp : $\infty$ non val sp di $f$ per $d > 1$)

<u>OK</u> . $\boxed{//}$

Def: $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ è immersione se $C^\infty$ e $f'(t) \neq 0 \ \forall t$

$f_0, f_1$ immersioni sono regolarmente omotope se omotope tramite immersioni



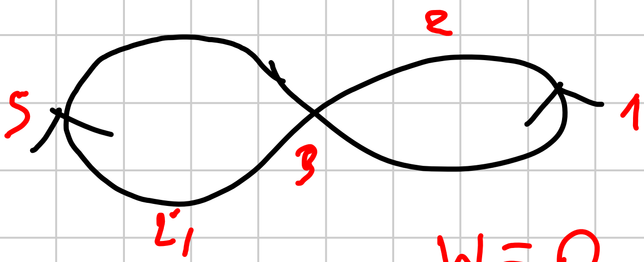
Se $f$ è immersione chiamo writhe di $f$

$$w(f) = \deg\left(\frac{f'}{\|f'\|} : S^1 \to S^1\right).$$

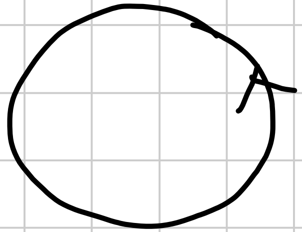
<u>Teo</u>: $f_0, f_1$ rep. omotope $\Longleftrightarrow$ $w(f_0) = w(f_1)$

(ho senso solo $C^\infty$.)

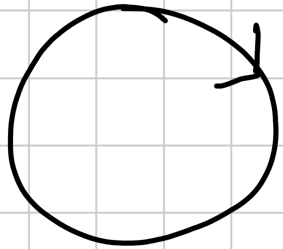
<u>Dimo</u>: provo che ogni $f$ tramite omotopia reg si riconduce a uno di questi modelli:



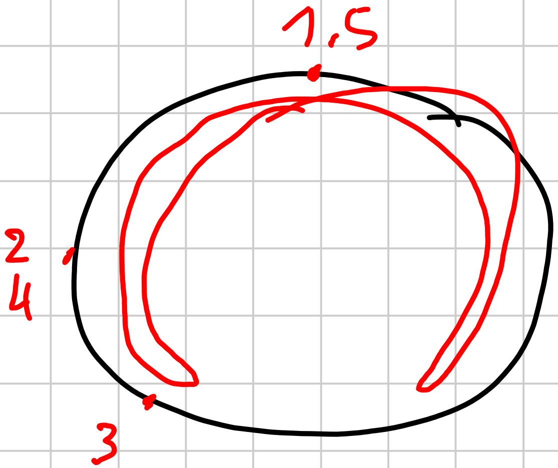

W = 0

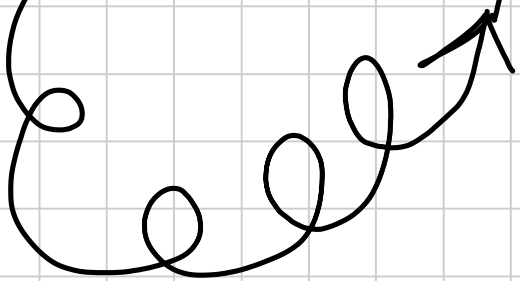


W = +1

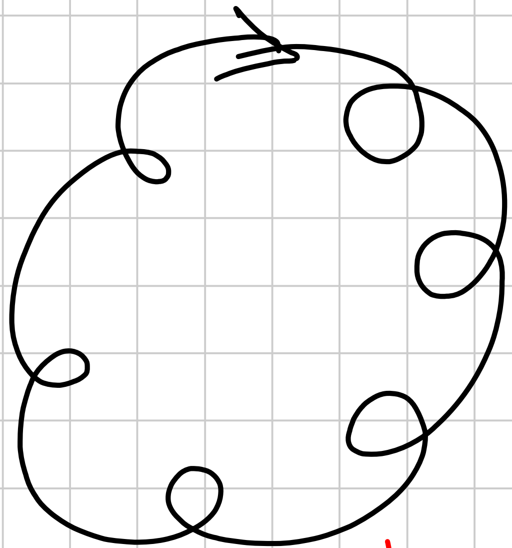


W = -1



$w = +k \geq 2$

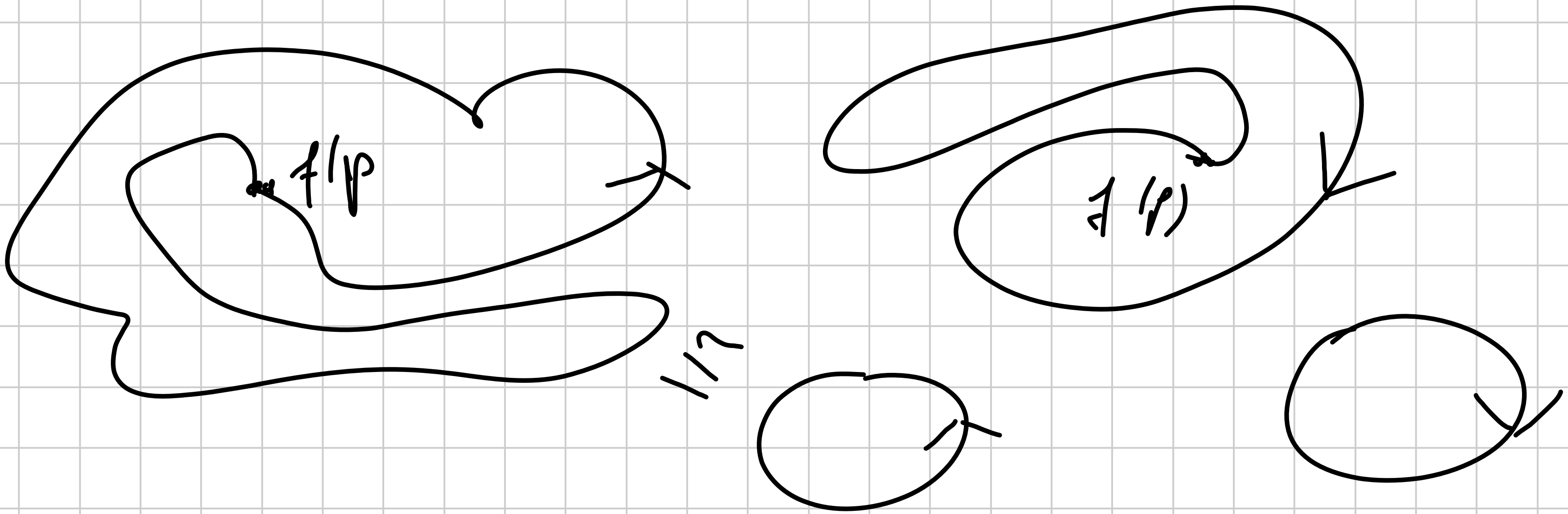


$w = -k \leq -2$

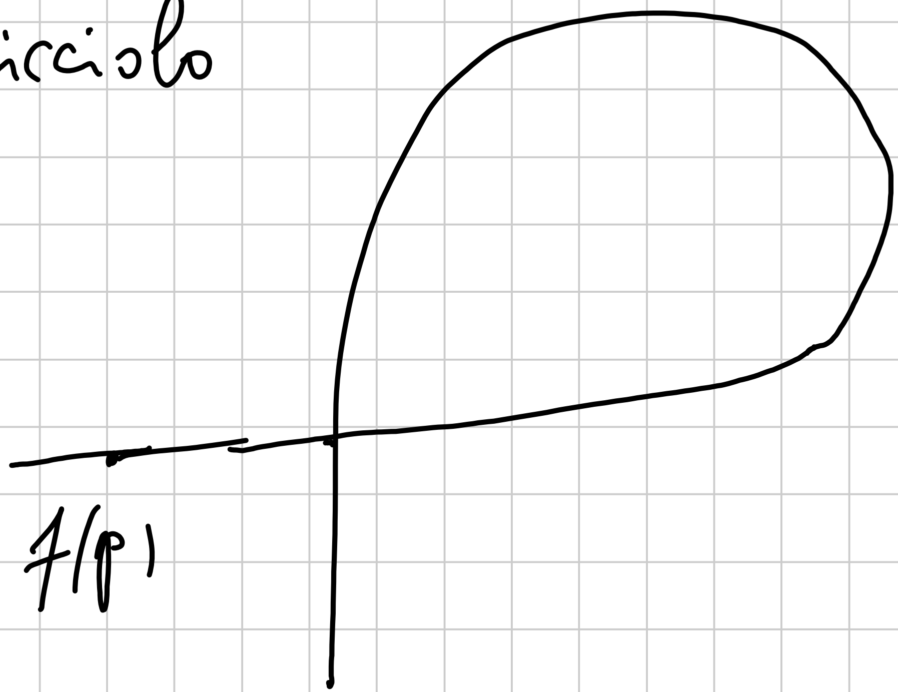
1. Elimino riccioli grandi:

Scelgo $p \in S^1$ e seguo $f$ da $p$ lungo $S^1$ in senso antiorario

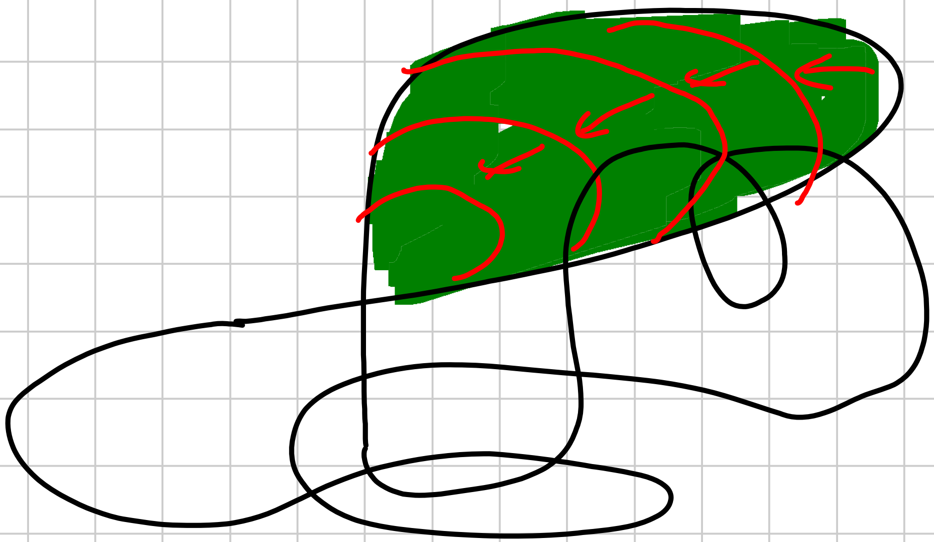
- Se non rivisito mai lo stesso punto



- Al primo punto che rivisito ho trovato un ricciolo

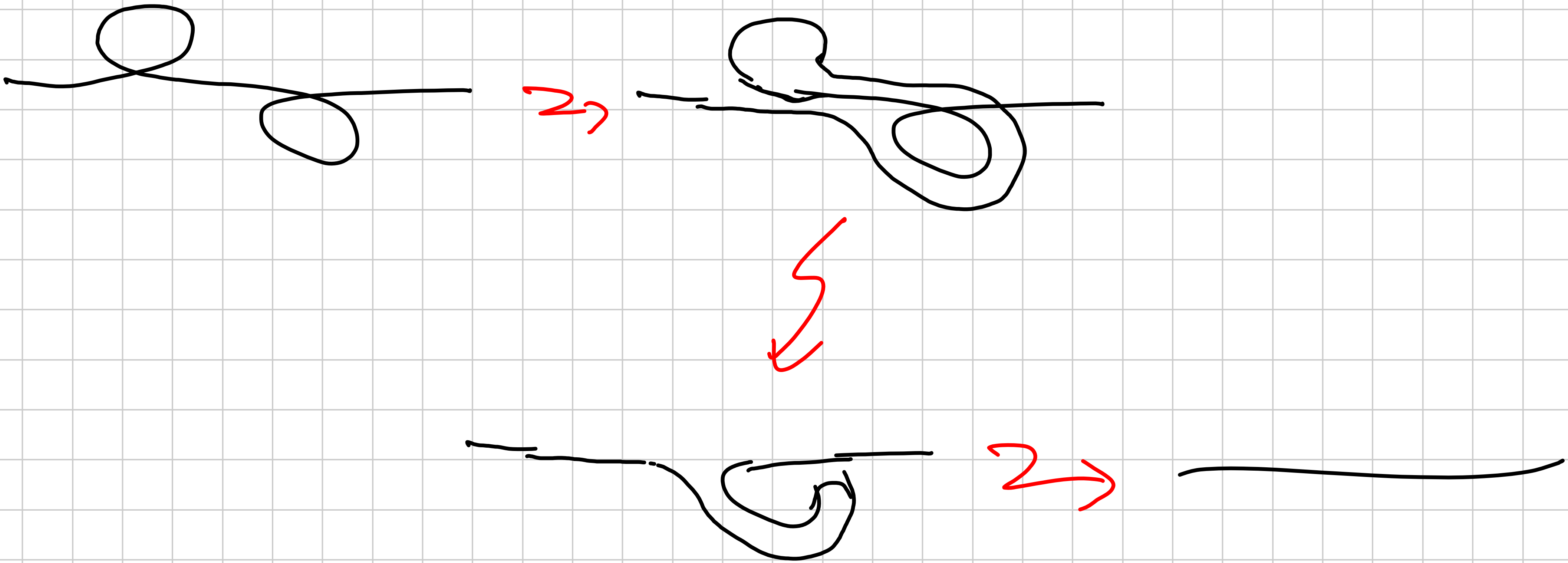



- Il ricciolo borda un disco che può contenere altri punti di $\mathrm{Im}(f)$ :



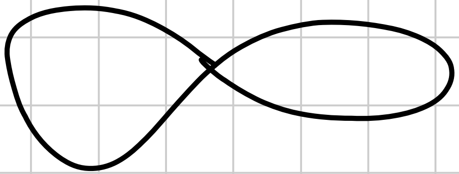
Ritratto in modo da avere solo riccioli che non intersecano col resto di $\mathrm{Im}(f)$.

2. Elimino ricci oli da parti opposte :



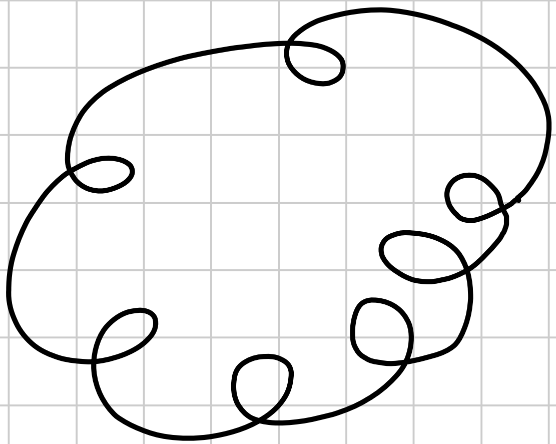
3. Restano: 0 riccioli

1 riccioli:



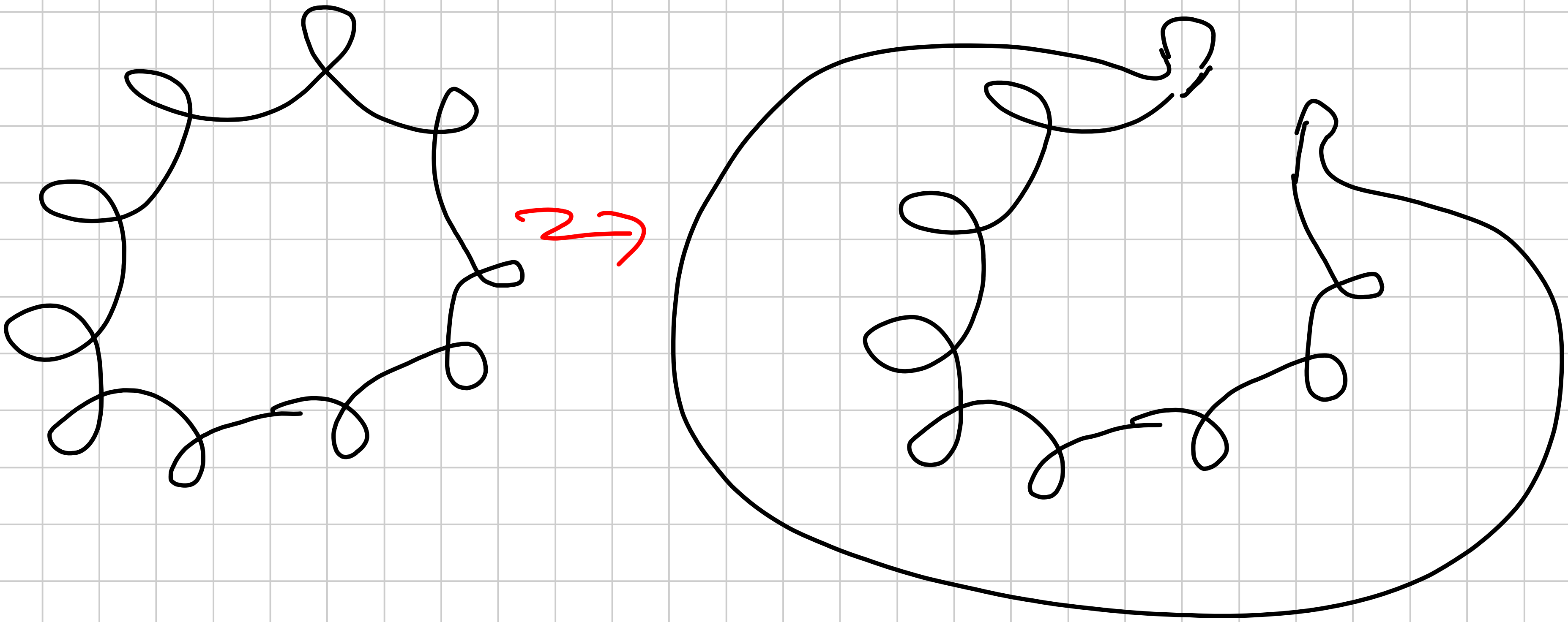
$\geq 2$ riccioli

dentro



OK

- fuori



$\blacksquare$