UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0\}$ e $f\ : X \to X$ è lineare e ha i soli autovalori -5 e 7, si può concludere che f è diagonalizzabile oppure che non lo è?

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, ortogonali a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e aventi somma delle coordinate reale.

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t-1 : 3-t : t+1]$ coincide con $[-2 : 1 : -3]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica affine $2x^2 + 2(1-t)xy + (t+3)y^2 + 2\sqrt{5}y + 2 = 0$ è un ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $4x^2 - z^2 - 4xy - 2yz + 4x = 0$.

6. Calcolare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = (1 + 2xy - y^2)\cos(3x+y)$, e i segni degli autovalori di tale matrice.

7. Calcolare $\int_\alpha (2xy\,\mathrm{d}x - 5y^2\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3-t^2 \\ 1-2t \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/14 — Esercizî

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = A + {}^{\mathrm{t}}A$, $C = A - {}^{\mathrm{t}}A$.

(A) (3 punti) Trovare gli autovalori di A e almeno un suo autovettore.

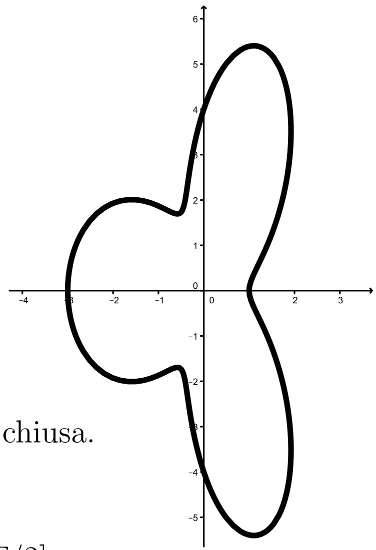
(B) (1 punto) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B.

(C) (3 punti) Trovare il polinomio caratteristico di B e i segni dei suoi autovalori.

(D) (3 punti) Trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che C sia coniugata tramite una matrice ortogonale a $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(E) (2 punti) Trovare tutti gli autovettori (reali) di C.

2. Considerare la curva $\alpha(t) = (2 - \cos(3t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$,
la cui immagine è mostrata in figura.



(A) (2 punti) Provare che α è periodica e trovarne il minimo periodo T.

(B) (1 punto) Provare che la restrizione di α a $[-T/2, T/2]$ è semplice e chiusa.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in $t = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ dove β è la restrizione di α a $[-T/2, T/2]$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\gamma x\,\mathrm{d}x$ dove γ è la restrizione di α a $[0, \pi]$.

(F) (1 punto) Provare che α è regolare.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. Nessuna delle due: in una base opportuna la f può avere matrice $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, dunque essere diagonalizzabile oppure non esserlo

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{195}}\begin{pmatrix} 4+7i \\ 9-7i \end{pmatrix}$

3. $t = 5$

4. $-1 < t < 0$ e $4 < t < 5$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; entrambi negativi

7. $\frac{71}{15}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{13}\right),\ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(B) B è simmetrica

(C) $t^3 - 16t^2 + 51t + 100$; due positivi e uno negativo

(D) $a = \pm\sqrt{21}$

(E) $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ con $t \neq 0$

2.

(A) $T = 2\pi$ perché $\alpha(t)$ appartiene sempre alla semiretta uscente dall'origine e passante per $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$, dunque $\alpha(t+k)$ può essere $\alpha(t)$ solo per k multiplo intero di 2π; inoltre anche il coefficiente $2 - \cos(3t)$ ha 2π tra i suoi periodi

(B) Entrambi i fatti seguono dalle considerazioni precedenti

(C) -2

(D) -2π

(E) -4

(E) La prima componente della derivata di α si annulla per $\sin(t) = 0$ e per $8\cos^3(t) - 3\cos(t) - 1 = 0$, mentre la seconda si annulla per $16\cos^4(t) - 18\cos^2(t) - 2\cos(t) + 3 = 0$, e queste equazioni non hanno soluzioni comuni