Geometria 14/3/16

Come (non) si ortonormalizza una base di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

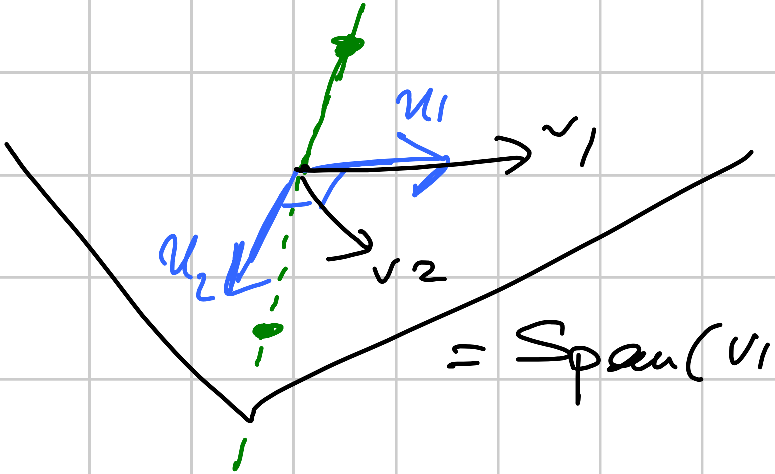
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle v_2 | u_1 \rangle \cdot u_1$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \cancel{\frac{-6+10+1}{30}}\ {}^{1}/_{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -20 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{484}} \begin{pmatrix} -20 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle v_3 | u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3 | u_2 \rangle \cdot u_2$$ No



$= \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$

u_3 è uno dei due vettori unitari ortogonali a $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$, cioè sulla retta generata da $v_1 \times v_2$

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$6 - 25 + 19$ ✓

$-9 - 10 + 19$ ✓

$$\Rightarrow u_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{9+25+19^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}.$$ Quale?

$$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} >0 & * & * \\ 0 & >0 & * \\ 0 & 0 & >0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(u_1, u_2, u_3)$ concorde con $\det(v_1, v_2, v_3)$

Inoltre $\det(u_1, u_2, v_1 \wedge v_2)$ è concorde con $\det(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2)$ che è positivo

$\Rightarrow$ se $\det(v_1, v_2, v_3) > 0$ allora $u_3 = \dfrac{v_1 \wedge v_2}{\| v_1 \wedge v_2 \|}$

se $\det(v_1, v_2, v_3) < 0$ allora $u_3 = -\dfrac{v_1 \wedge v_2}{\| v_1 \wedge v_2 \|}$

Per noi

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = 28 + 15 + 20 - 8 + 15 \cdot 7 + 5 > 0$$

$$\Rightarrow u_3 = +\frac{1}{\sqrt{486}}\begin{pmatrix} -20 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ricordo: V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $W \subset V$ sttsp
$\dim V < +\infty$

$\Rightarrow V = W \oplus W^\perp$ dunque ho p_W proiez. ortog.

Σ: se $w_1, \dots, w_k$ è base ortog. di W

$$p_W(v) = \sum \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j.$$

__Es:__ $V=\mathbb{R}^3$ $\qquad W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\-7\end{pmatrix}\right)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v_1 \qquad\quad v_2$

$$w_1 = v_1 \qquad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 | v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1$$

$$= \begin{pmatrix}2\\4\\-7\end{pmatrix} - \frac{6-4-35}{9+1+25}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}169\\107\\-80\end{pmatrix}$$

$$P_W\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{3x-y+5z}{35}\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} + \frac{169x+107y-80z}{169^2+107^2+80^2}\begin{pmatrix}169\\107\\-80\end{pmatrix} = \dots$$

Invece: $v = P_W(v) + P_{W^\perp}(v)$

$$\Rightarrow P_W(v) = v - P_{W^\perp}(v) \quad , \quad W^\perp = \mathrm{Span}\begin{array}{c}(v_1 \wedge v_2)\\ \parallel \\ \begin{pmatrix} -13 \\ 31 \\ 14 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow P_W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{-13x + 31y + 14z}{13^2 + 31^2 + 14^2}\begin{pmatrix} -13 \\ 31 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$= (\text{più facile})$

Def: dato V con $\langle\cdot|\cdot\rangle$ dico che $f: V \to V$ lin. è autoaggiunta se

$$\langle f(v)|w\rangle = \langle v|f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

Es: $V = \mathbb{R}^n$ con $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$, $M \in M_{n\times n}$

M autoaggiunta

$$\iff \langle M\cdot x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x|My\rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x, y$$

$$\iff {}^t x \cdot {}^t M \cdot y = x \cdot M \cdot y \quad \forall x, y$$

$$\iff {}^t x \cdot ({}^t M - M) \cdot y = 0 \quad \forall x, y$$

$\Longleftrightarrow \quad {}^tM = M \qquad (M \text{ simmetrica})$

Es: $\quad V = \mathbb{R}^n \;, \quad \langle \cdot | \cdot \rangle_A \qquad M \in \mathcal{M}_{n\times n}$

M autoaggiunta rispetto ad $\langle \cdot | \cdot \rangle_A \Longleftrightarrow$

$$\langle M\cdot x | y \rangle_A = \langle x | M\cdot y \rangle_A \quad \forall x, y$$

$$\Longleftrightarrow \quad ({}^tx \cdot {}^tM) \cdot A \cdot y = {}^tx \cdot A \cdot (M \cdot y) \quad \forall x, y$$

$$\Longleftrightarrow \quad {}^tM \cdot A = A \cdot M \Longleftrightarrow {}^tM = A \cdot M \cdot A^{-1}$$

Prop: $f: V \to V$ è la proiezione ortogonale su qualche sottospazio W
$\Longleftrightarrow$ $f \circ f = f$ e f è autoaggiunta

Dim: $\underline{\Rightarrow}$: Sia $f = p_W$; è proiez $\Rightarrow f \circ f = f$;

Siano $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = w_1 + z_1$, $v_2 = w_2 + z_2$

$$w_1 = f(v_1) \in W, \quad z_1 \in W^\perp, \quad w_2 = f(v_2) \in W, \quad z_2 \in W^\perp$$

$$\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle w_1 | v_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 + z_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle + 0$$

$$\langle v_1 | f(v_2) \rangle = \langle v_1 | w_2 \rangle = \langle w_1 + z_1 | v_2 \rangle = \langle w_1 | v_2 \rangle + 0$$

✓

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $f \circ f = f$ e f autoaggiunta.

Sappiamo che f è la la proiez. su $\operatorname{Im}(f)$ rispetto alla deco $V = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

Resta da vedere che $\operatorname{Ker}(f) = (\operatorname{Im}(f))^{\perp}$;

poiché hanno la stessa dimensione

$= \dim V - \dim(\mathrm{Im}(f))$

basta vedere che $\mathrm{Ker}(f) \subset (\mathrm{Im}(f))^\perp$, cioè che

$\langle z | w \rangle = 0 \qquad \forall z \in \mathrm{Ker}\, f, \ \forall w \in \mathrm{Im}(f).$

Infatti: $\langle z | w \rangle = \langle z \mid f(w) \rangle$

$= \langle f(z) | w \rangle = \langle 0 | w \rangle = 0.$

$\blacksquare$

Cor: In $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ le matrici che rappresentano proiez. ortog. sono esattamente le M con $M \cdot M = M$ e ${}^tM = M$.

Es: $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

$W^\perp = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$-14 - 10 + 24 = 0$ ✓

$-28 + 20 + 8 = 0$ ✓

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_{W^\perp} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{-7x + 10y + 8z}{\underbrace{49 + 100 + 64}_{= 213}} \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{213}\begin{pmatrix} 164 & 70 & 56 \\ 70 & 113 & -80 \\ 56 & 80 & 149 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$${}^{t}M = M \quad \checkmark$$

$$M \cdot M = M$$