UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Posto $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ trovare $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]_{(v_1,v_2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Dato un sistema di 17 generatori di $\{z \in \mathbb{C}^8 : \ iz_1 + 7z_6 = (1-i)z_3 + z_8 = 0\}$, quanti vettori bisogna scartarne per ottenere una base?

3. Posto $V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t] : \ p'(-1) = 0\}$, esibire un'applicazione lineare surgettiva $f : V \to \mathbb{R}^2$, oppure provare che non esiste alcuna tale f.

4. Risolvere $\begin{cases} 2x - 5y + z = 7 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ -7x + 2y + z = -18. \end{cases}$

5. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Posto $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0\}$ e $Z = \mathrm{Span}(4e_1 - 2e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione su W rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ del vettore $2e_1 - e_2 - 3e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♣ 4. ♢ 5. ♠ 6. ♡ 7. ♢ 8. ♣ 9. ♠ 10. ♡

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/15 — Esercizî

1. Considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_j) = u_j$ per $j = 1, 2, 3$.

(B) (2 punti) Provare che $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

(Le risposte alle due successive domande contengono numeri non piccoli; chi lo desidera può esprimere le risposte lasciando indicate operazioni tra matrici numeriche, senza eseguirle.)

(C) (4 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}$, dove $\mathcal{E}_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_3}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine

$$E_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} t-1 \\ -4 \\ 1+3t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t \\ t+3 \\ -4t-3 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana di E_2 (cioè di E_t per $t = 2$).

(B) (3 punti) Trovare i valori $t_0 < t_1$ di t per i quali E_t non è un piano.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_{t_0} ed E_{t_1} (cioè di E_t per i valori t_0 e t_1 di t trovati nel punto precedente).

(D) (3 punti) Provare che E_{t_0} ed E_{t_1} sono rette sghembe.

Risposte

3. ♣

1. $\begin{pmatrix} -10 \\ 13 \end{pmatrix}$

2. 11

3. L'unica f tale che $f(1) = e_1,\ f(t^2 + 2t) = e_2,\ f(t^3 - 3t) = 0$

4. $x = 2,\ y = -1,\ z = -2$

5. $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. 9

7. $\begin{pmatrix} 42 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) $\det(v_1, v_2, v_3) = -1 \neq 0$, dunque (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$, dunque segue dalla teoria

(B) $\det(w_1, w_2) = 29 \neq 0$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & 17 & -4 \\ -25 & -15 & 8 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 132 & 89 & -12 \\ -47 & -24 & 28 \end{pmatrix}$

2.

(A) $3x - y - z = 3$

(B) $t_0 = -1$, $t_1 = 3$

(C) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5y + 2z = 11 \end{cases}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$