UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/6/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 8}[t] : \; p'(-3) = p''(2) = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per avere una base?

2. Se $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^8$ è lineare non iniettiva, che dimensione può avere $W \subset \mathbb{C}^8$ se $\mathbb{C}^8 = W \oplus \operatorname{Im}(f)$?

3. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $f : X \to X$ è data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (7e_1 - 3e_2 + 3e_3,\; 3e_1 + e_2 + 7e_3)$.

4. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, trovare $f^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Risolvere $(2 - 3i)z + (1 + i)\overline{z} = 7 - 3i$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 7x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \operatorname{Span}(e_1 - 3e_2 + 2e_3)$, calcolare la proiezione su X di $-e_1 + 4e_2 + e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/6/15 — Eserciziî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} (t-1)x + 2y - z = 2 \\ x + 2z - w = 1 \\ (t+4)x + 4y + (t-6)w = t \\ (t-3)y - 9z + 4w = -2. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Provare che esistono due soli valori di t per i quali non è vero che il sistema ammette soluzione unica. Chiamare t_0 il valore minore e t_1 quello maggiore.

(B) (2 punti) Provare che per $t = t_0$ il sistema è impossibile.

(C) (3 punti) Trovare tutte le soluzioni del sistema per $t = t_1$.

(D) (3 punti) Detta X la giacitura dello spazio delle soluzioni del sistema per $t = t_1$ e posto $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2,\ e_3 + e_4)$, provare che si ha la decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$ e trovare la relativa proiezione di $e_1 + e_4$ su X.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazi aventi le seguenti equazioni cartesiane

$$X:\ 3x - 5y + 6z = 0 \qquad Y_t:\ \begin{cases} (t+2)x + ty + (2-3t)z = t-2 \\ (7-4t)x - (t+2)y + (4t-1)z = 1-t. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Provare che $v = 3e_1 + 3e_2 + e_3$, $v_1 = 9e_1 + 3e_2 - 2e_3$ e $v_2 = -e_1 + 3e_2 + 3e_3$ appartengono a X e che $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2)$ è una base di X, quindi calcolare $[v]_{\mathcal{B}}$.

(B) (3 punti) Trovare l'unico valore t_0 di t per il quale Y_t non è una retta.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di Y_t per $t = 3$ e per $t = t_0$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di $X \cap Y_{t_0}$.

Risposte

5. ♢

1. 4

2. Tra 4 e 8

3. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

5. -25 e 45

6. $z = \frac{1}{11}(19 + 5i)$

7. $e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $t_0 = -1$ e $t_1 = 5$

(B) Tra le parti omogenee delle equazioni vale la relazione $\mathrm{III} = 2\cdot\mathrm{I} + 55\cdot\mathrm{II} + 12\cdot\mathrm{IV}$ che invece non vale per i termini noti

(C) $e_1 - e_2$ più il generato di due dei vettori $-4e_1 + 9e_2 + 2e_3,\ e_1 - 2e_2 + e_4,\ e_1 + 4e_3 + 9e_4,\ e_2 + 2e_3 + 4e_4$

(D) $\frac{1}{7}(3e_1 - 4e_2 + 4e_3 + 11e_4)$

2.

(A) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) $t_0 = 4$

(C) $Y_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$Y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

(D) $-\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 21 \end{pmatrix}$