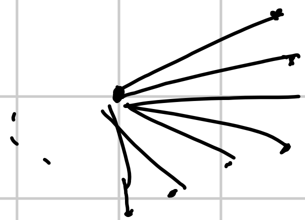
ETA 20/11/14

<u>Errore</u> : Prop : C cpt $\subset |K| \Longrightarrow C$ incontra la parte interna di un numero finito di simplessi.

<u>Es</u> : $V = \mathbb{N}$, $K = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{0, n\} : n \geq 1\}$



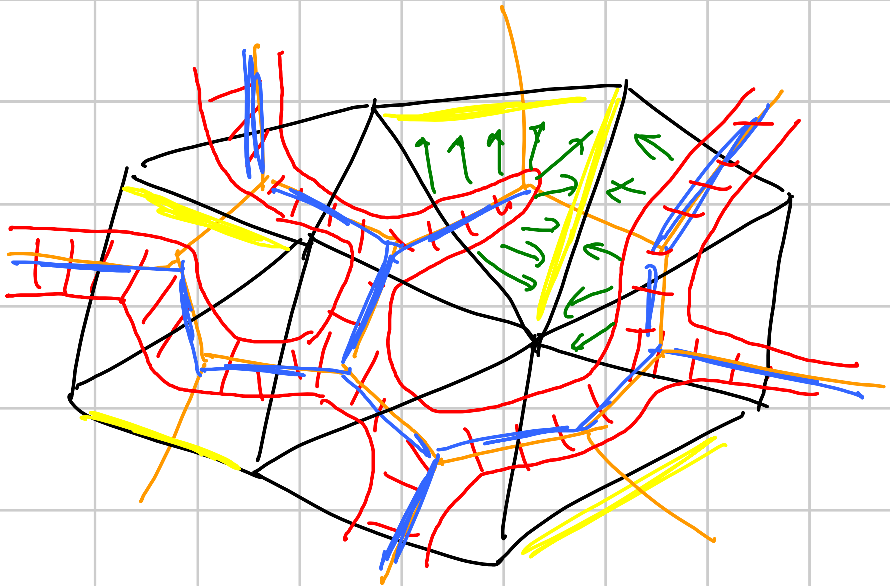
$\{0\}$ –

Realizzazione di $M^{(n)}$ chiuse con una sola n-cella:

- Γ grafo incollamenti
- $T \subset \Gamma$ albero max
- $C^{(n)} = \bigcup(T) \subset M$; $g : \partial C^{(n)} \to \bigcup\{\tau \in M^{[n-1]} : \hat{\tau} \notin T\}$

Γ T

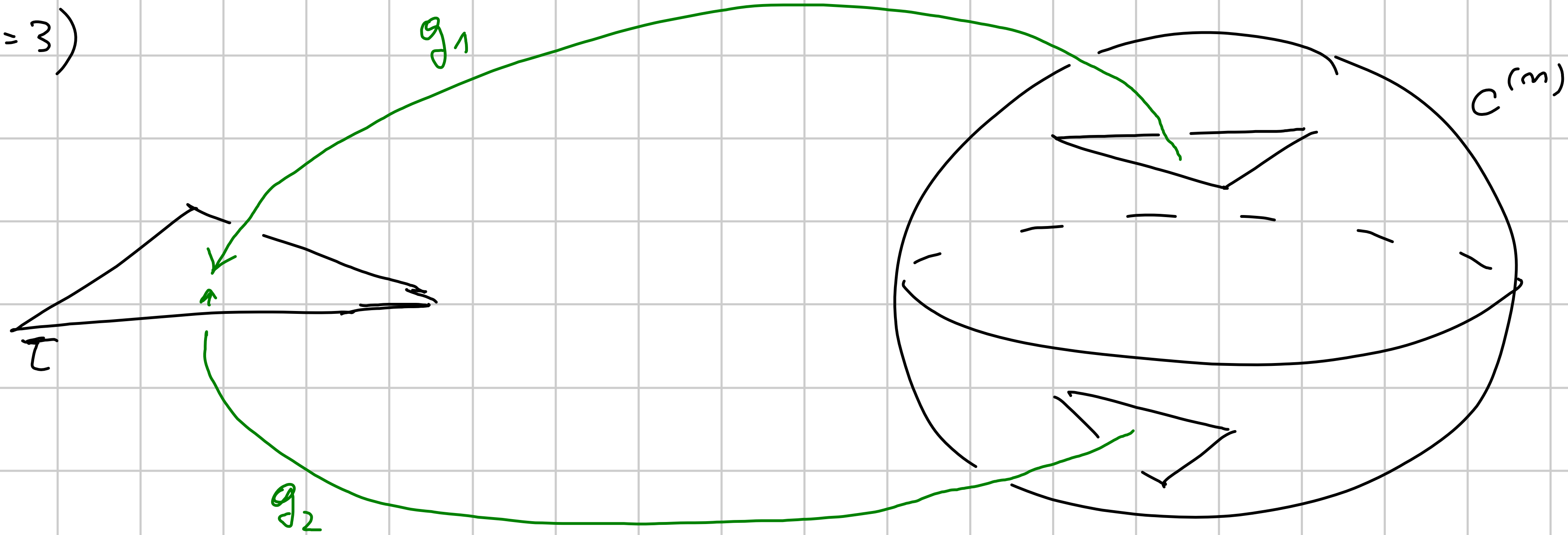
$C^{(n)}$ g



Calcolo di $H_n(M^{(n)})$: presa $\tau \in M^{[n-1]}$, $\hat{\tau} \notin T$

devo calcolare $\varepsilon(C^{(n)}, \tau)$:

$(n=3)$



- se una tra g_1 e g_2 mantiene l'orientazione e l'altra la invece ho $\varepsilon(c^{(n)}, \tau) = 0$: se ciò accade $\forall \tau$ ho su M una orientazione coerente $\Rightarrow \partial c^{(n)} = 0 \Rightarrow H_n(M) \cong \mathbb{Z}$

- se g_1 e g_2 entrambe mantengono o entrambe invertono l'orientazione ho $\varepsilon(c^{(n)}, \tau) = \pm 2$ $\Rightarrow H_n(M) = 0$ e M non è orientabile.

Calcolo dell'omologia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = D^n /_{x \sim -x \text{ se } \|x\| = 1} \quad \text{e} \quad S^{n-1}/_{x \sim -x} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cup_g D^n$

$g : S^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ proiezione naturale

$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha una struttura di CW-complesso con 1 j-cella $C^{(j)}$ per $j = 0, \dots, n$.

Calcoliamo $\partial C^{(j)}$ cioè $\varepsilon(C^{(j)}, C^{(j-1)})$: vediamo quante volte la $(j-1)$-cella compare nel bordo della j-cella :

la $(j-1)$-cella $C^{(j-1)}$ appare su $\partial C^{(j)} = S^{n-1}$

come $\{x \in S^{j-1} : x_j \geq 0\}$ e $\{x \in S^{j-1} : x_j \leq 0\}$

ottenuti uno dall'altro tramite $x \longmapsto -x$.

Quindi

$$\varepsilon(C^{(j)}, C^{(j-1)}) = \begin{cases} 2 & \text{se } \begin{array}{c} S^{j-1} \longrightarrow S^{j-1} \\ x \longmapsto x \end{array} \text{ conserva orientazione} \quad \text{cioè se } j \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } \quad '' \quad \text{inverte} \quad \text{cioè se } j \text{ è dispari.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} & n+1 & n & & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ (C,\partial) & 0 \to & \mathbb{Z} \to & \dots \to & \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} \xrightarrow{0} & 0 \\ H_*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) & & & & & \mathbb{Z}/2 & 0 & \mathbb{Z}/2 & \mathbb{Z} & \end{array}$$

$$\Longrightarrow H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k=0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{se } 0<k<n \quad k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } 0<k<n \quad k \text{ pari} \quad \text{o } k>n \\ 0 & \text{se } k=n \text{ pari} \\ \mathbb{Z} & \text{se } k=n \text{ dispari} \end{cases}$$

cioè:

$$H_0(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \qquad H_k(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \mathbb{Z}/ & k \text{ dispari} \end{cases} \quad 0<k<n$$

$$H_n(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \qquad H_k(\mathbb{P}^n) = 0 \quad k>n.$$

<u>Cor:</u> $\mathbb{P}^n$ è orientabile $\iff$ n dispari _

<u>Calcolo di $H_*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$</u> _

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \leq 1 \right\} \Big/ \substack{z \sim e^{i\vartheta} z \\ \|z\| = 1}$$

$$\text{quoz. del bordo} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_f D^{2n}$$

$\Longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha str. di CW-complesso con una j-celle per $j = 0, 2, 4, \dots, 2n-2, 2n$

$$\Longrightarrow (C, \partial) \quad \dots \to \mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \dots$$

$$\Longrightarrow H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & 0 \leq k \leq 2n \quad k \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>Caratteristica di Eulero.</u>

<u>Lem</u>: Sia $\mathcal{C} = \left((C_n, \partial_n) \right)_{n=0}^{+\infty}$ complesso di catene con ogni C_n sp. vett. su $\mathbb{K}$ con ∂_n $\mathbb{K}$-lineare ($\Rightarrow H_n(\mathcal{C})$ sp. vett. $\forall n$) e $C_n = 0$ per $n >> 0$.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim H_i(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim (C_i).$$

<u>Dim</u>: $H_i(\mathcal{C}) = \mathrm{Ker}(\partial_i) / \mathrm{Im}(\partial_{i+1})$

$$\Rightarrow \dim H_i = \dim \mathrm{Ker}(\partial_i) - \dim \mathrm{Im}(\partial_{i+1})$$

$$\dim C_i = \dim \operatorname{Ker} \partial_i + \dim \operatorname{Im} \partial_i$$

$$\sum_i (-1)^i \dim H_i = \sum_i (-1)^i \left(\dim \operatorname{Ker} \partial_i - \dim \operatorname{Im} \partial_{i+1} \right)$$

$$= \sum (-1)^i \dim \operatorname{Ker} \partial_i + \underbrace{\sum_i (-1)^{i+1} \dim \operatorname{Im} \partial_{i+1}}_{\sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Im} \partial_i}$$

$$= \sum_i (-1)^i \left(\underbrace{\dim \operatorname{Ker} \partial_i + \dim \operatorname{Im} \partial_i}_{\dim C_i} \right) \qquad \blacksquare$$

Def: G gruppo abeliano finitamente generato

$$\Longrightarrow G \cong \mathbb{Z}^k \oplus T \quad , \quad \# T < +\infty .$$

Poniamo

$$k = \mathrm{rank}(G) \quad , \quad T = \mathrm{Tor}(G)$$

sottogruppo di torsione.

Oss: $\mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}\left(G / \mathrm{Tor}(G) \right)$.

Prop: se $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)_{n=0}^{+\infty}$ complesso di catene di gruppi abeliani e $C_n = 0$ per $n >> 0$ allora

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \operatorname{rank}(H_i(\mathcal{C})) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \operatorname{rank}(C_i)$$

Dimo: come sopra con questi ingredienti:

- $\operatorname{rank}(C_i) = \operatorname{rank}(Z_i) + \operatorname{rank}(B_{i-1})$
- $\operatorname{rank}(H_i) = \operatorname{rank}(Z_i) - \operatorname{rank}(B_i)$

So che: $\quad H_i = Z_i / B_i \quad$ e

$$B_{i-1} = \operatorname{Im}(\partial_i) = C_i / \operatorname{Ker}(\partial_i) = C_i / Z_i$$

quindi entrambi gli ingredienti seguono da i

Teo: $\operatorname{rank}(G/H) = \operatorname{rank}(G) - \operatorname{rank}(H)$.

Per la dimo del teorema uso la nozione di $\otimes$.

R anello (con 1); G, H R-moduli.

$G \otimes_R H$ = R-modulo libero generato dai simboli $g \otimes h$
$g \in G$, $h \in H$ modulo

$$(r_1 g_1 + r_2 g_2)\otimes h = r_1 \cdot g_1 \otimes h + r_2 \cdot g_2 \otimes h$$
$$g\otimes (r_1 h_1 + r_2 h_2) = r_1 \cdot g\otimes h_1 + r_2 \cdot g \otimes h_2 .$$

Def: $\varphi : G\times H \to K$ R-bilineare se ...

Prop: esiste $\varphi_0 : G\times H \longrightarrow G\otimes_R H$ bilineare tale che $\forall \varphi : G\times H \to K$ R-bilineare esiste unico $\tilde{\varphi} : G\otimes_R H \to K$ R-lineare con

$$\begin{tikzcd}
G\times H \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G\otimes_R H \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
& K
\end{tikzcd}$$

Inoltre tale proprietà caratterizza $G \otimes_R H$ / isomorfismo di R-moduli.

<u>Dim</u>: φ_0 estende $(g,h) \longmapsto g \otimes h$.

Dato φ la $\tilde{\varphi}$ è l'unica mappa t.c. $\tilde{\varphi}(g \otimes h) = \varphi(g,h)$.

Caratterizzazione: se $\varphi_1 : G \times H \longrightarrow K$ ha la stessa proprietà

$$\begin{tikzcd}
 & G \otimes_R H \arrow[d, "\tilde{\varphi}_1"] \\
G \times H \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & K \arrow[d, "\tilde{\varphi}_0"] \\
 & G \otimes_R H
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1 = id$

analog. $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0 = id$ ∎

G, H gruppi abeliani (i.e. $\mathbb{Z}$-moduli) scriviamo

$$G \otimes_{\mathbb{Z}} H = G \otimes H.$$

<u>Oss</u>: $G \otimes \mathbb{Q}$ ha struttura di $\mathbb{Q}$ spazio vett.

con $\lambda \cdot (g \otimes q) = g \otimes (\lambda \cdot q)$.

<u>Oss</u>: $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

$$n \otimes q = 1 \otimes (n \cdot q) \mapsto n \cdot q$$

<u>Oss</u>: $\mathbb{Z}/_n \otimes \mathbb{Q} = 0$

$$[m]\otimes q = [m]\otimes n\cdot\left(q/n\right) = n\cdot[m]\otimes\left(q/n\right) = 0\otimes q/n = 0$$

<u>Oss</u>: $(G\oplus H)\otimes K \cong (G\otimes K)\oplus(H\otimes K)$

<u>Cor</u>: $\operatorname{rank}(G) = \dim_{\mathbb{Q}}(G\otimes\mathbb{Q})$

Volevamo: $\operatorname{rank}(G/H) = \operatorname{rank}(G) - \operatorname{rank}(H)$. Basta:

<u>Prop</u>: $$(G/H)\otimes\mathbb{Q} \cong \frac{G\otimes\mathbb{Q}}{H\otimes\mathbb{Q}}$$

Dim: pongo $\varphi : G \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow (G/H) \otimes \mathbb{Q}$ la mappa t.c.

$$\varphi(g \otimes q) = (g+H) \otimes q .$$

Fatti: φ è bendef e $\mathbb{Q}$ lineare

φ è surgettiva

$H \otimes \mathbb{Q} \subset \operatorname{Ker} \varphi$

Per concludere: $\operatorname{Ker} \varphi \subset H \otimes \mathbb{Q}$.

Supponiamo che $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes q_i\right) = 0$.

(non scrivo $\lambda_i \cdot g_i \otimes q_i = g_i \otimes (\lambda_i q_i)$).

Sia $N \in \mathbb{N}$ t.c. $N \cdot q_i = m_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$.

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes q_i = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes \frac{1}{N} \cdot (N q_i)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes m_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \left((m_i g_i) \otimes 1 \right)$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i g_i \right) \otimes 1$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} g_i \otimes q_i\right) = 0 \in G/H \otimes \mathbb{Q}$$

$$\Longrightarrow \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{m} m_i g_i\right) \otimes 1\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} m_i g_i \in H$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} m_i g_i\right) \otimes \frac{1}{N}}_{\parallel} \in H \otimes \mathbb{Q}$$

$$\sum_{i=1}^{m} g_i \otimes \underbrace{\frac{m_i}{N}}_{q_i} \Longrightarrow \sum g_i \otimes q_i \in H \otimes \mathbb{Q}. \quad \blacksquare$$

Def: $\mathcal{C}$ complesso di catene:

$$\chi(\mathcal{C}) = \sum (-1)^i \operatorname{rank}(H_i(\mathcal{C}))$$

Prop: $\chi(\mathcal{C}) = \sum (-1)^i \cdot \operatorname{rank}(C_i)$.

Def: X sp. top. $X \simeq Y$ CW-complesso

$\beta_i(X) = \operatorname{rank}(H_i(Y))$ i-esimo numero di Betti di X

$\chi(X) = \sum (-1)^i \cdot \beta_i$ caratteristica di Eulero.

χ inv. omotopico.

Prop: se $X \simeq Y$ e Y ha m_i celle i-dim $i=0,\dots,n$ allora

$$\chi(X) = m_0 - m_1 + m_2 \dots -$$

Es: $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$

$\chi(\mathbb{P}^2) = 1 - 1 + 1 = 1$

$\chi(\mathbb{P}^n) = 1 - 1 + 1 \dots - (-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$

$\chi(T) = \chi(K) = 1 - 2 + 1 = 0.$

Sappiamo che S^2 riveste 2:1 $\mathbb{P}^2$

e $\chi(S^2) = 2 \cdot \chi(\mathbb{P}^2)$. Più in generale:

<u>P</u>rop: se $\tilde{X} \xrightarrow{d:1} X$ riv. e X ha str. di CW-complesso con m_j celle j-dim allora $\tilde{X}$ ha str. di CW-compl. con $d \cdot m_j$ celle j-dim

$$\Rightarrow \chi(\tilde{X}) = d \cdot \chi(X).$$

Dim: sollevo a $\tilde{X}$ tutte le celle di X:

$$\begin{tikzcd}
D^j \arrow[rr, "\tilde{f}^{(j)}_{\alpha,p}"] \arrow[d, hook] \arrow[drr, "f^{(j)}_\alpha"] & & \tilde{X} \arrow[d] \\
S^{j-1} \arrow[r, "g^{(j)}_\alpha"] & X^{(j-1)} \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}$$

$p = 1, \dots, d$

le j-celle di $\tilde{X}$ sono $\tilde{g}^{(j)}_{\alpha,p} = \tilde{f}^{(j)}_{\alpha,p}\Big|_{S^{j-1}}$ $\quad p = 1, \dots, d$ $\square$

Numero di Lefschetz (versione di χ per mappe) –

Ricordo: $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

$\Rightarrow tr(M^{-1} \cdot A \cdot M) = tr(A)$

$\Rightarrow tr(f : V \circlearrowleft) = tr([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}})$ ben def

Prop: sia $\mathcal{C} = (C_i, \partial_i)_{i=0}^{+\infty}$ complesso di catene con C_i sp. vett. e ∂_i lineare; $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mappa tra complessi con φ_i lineare

($\Rightarrow H_i(\mathcal{C})$ è sp. vett. e $\varphi_{i*} : H_i(\mathcal{C}) \circlearrowleft$ lineare)

$$\Rightarrow \sum (-1)^i \, tr(\varphi_{i_*}) = \sum (-1)^i \, tr(\varphi_i).$$

Dim: Ricordo $H_i = Z_i / B_i \qquad Z_i = \operatorname{Ker} \partial_i$

$B_i = \operatorname{Im} \partial_{i+1}$

$Z_0 = C_0$; prendo $\mathcal{B}_0$ base di B_0; la completo a base $\mathcal{B}_0, \tilde{\mathcal{H}}_0$ di Z_0 ($\tilde{\mathcal{H}}_0$ si proietta a base $\mathcal{H}_0$ di H_0).
sollevo $\mathcal{B}_0$ rispetto a ∂_1 a un insieme $\mathcal{K}_1$ di vettori di C_1; prendo base $\mathcal{B}_1$ di B_1, completo base $\mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{H}}_1$ di Z_1;
ora $\mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{H}}_1$ base di $Z_1 = \operatorname{Ker} \partial_1$

$\mathcal{K}_1$ sollevamento rispetto a ∂_1 di base di $B_0 = \mathrm{Im}(\partial_1)$

$\Longrightarrow \mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{H}}_1, \mathcal{K}_1$ sono base di C_1.

Iterativamente costruisco una base $\mathcal{B}_j, \tilde{\mathcal{H}}_j, \mathcal{K}_j$ di C_j

con • $\mathcal{B}_j$ base di B_j

• $\tilde{\mathcal{B}}_j, \tilde{\mathcal{H}}_j$ base di $Z_j \Longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}_j$ si proietta a base $\mathcal{H}_j$ di H_j

• $\mathcal{B}_{j-1} = \partial_j(\mathcal{K}_j)$.

φ mappa tra complessi $\Longrightarrow \varphi_j(Z_j) \subset Z_j$ e $\varphi_j(B_j) \subset B_j$

(serve per la def. di φ_{j_*})

$$\Rightarrow [\varphi_j]^{\mathcal{B}_j, \tilde{\mathcal{H}}_j, \mathcal{K}_j}_{\mathcal{B}_j, \tilde{\mathcal{H}}_j, \mathcal{K}_j} = \begin{pmatrix} M_j & X_j & Y_j \\ 0 & N_j & W_j \\ 0 & 0 & P_j \end{pmatrix}$$

inoltre $[\varphi_{j_*}]^{\mathcal{H}_j}_{\mathcal{H}_j} = N_j$.

Affermo che $P_j = M_{j-1}$. Questo basta:

$$\sum (-1)^j \operatorname{tr}(\varphi_j) = \sum (-1)^j \left(\operatorname{tr}(M_j) + \operatorname{tr}(N_j) + \operatorname{tr}(P_j)\right)$$

$$= \cancel{\sum (-1)^j} \, tr(M_j) + \underbrace{\sum (-1)^j tr(N_j)}_{\sum (-1)^j tr(\varphi_{j*})} + \underbrace{\sum (-1)^j tr(P_j)}_{- \cancel{\sum (-1)^{j-1}} tr(M_{j-1})}$$

Ricordo: $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è quella matrice t.c. $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Sappiamo:
$$\partial_j \circ \varphi_j = \varphi_{j-1} \circ \partial_j$$
$$\mathcal{B}_{j-1} = \partial_j \mathcal{K}_j$$

$$\varphi_j \cdot \mathcal{B}_j = \mathcal{B}_j \cdot M_j$$

$$\varphi_j \cdot K_j = \mathcal{B}_j \cdot Y_j + \tilde{\mathcal{H}}_j \cdot W_j + K_j \cdot \underline{P}_j$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{j-1} \cdot \mathcal{B}_{j-1} &= \varphi_{j-1} \cdot \partial_j K_j = \partial_j \varphi_j K_j \\
\shortparallel \qquad & \\
\mathcal{B}_{j-1} \cdot M_{j-1} \qquad &= \partial_j \left(\mathcal{B}_j \cdot Y_j + \tilde{\mathcal{H}}_j \cdot W_j + K_j \cdot \underline{P}_j \right) \\
&= 0 + 0 + \partial_j K_j \cdot \underline{P}_j \\
&= \mathcal{B}_{j-1} \cdot \underline{P}_j .
\end{aligned}$$

$\blacksquare$