UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 30/6/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare il polinomio caratteristico di $f : X \to X$ dove $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ e $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ sia diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 2k^2 - k + 3 & 2k - 2k^2 \\ k^2 & 3 - k^2 \end{pmatrix}$.

3. Trovare i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî, ortogonali a $2e_1 + 7e_2 - e_3$ e aventi somma delle componenti nulla.

4. Posto $A_k = \begin{pmatrix} 2k-9 & k^2-1 & 0 \\ 5-k & k^2-3 & 1-2k \\ 0 & k^2-2 & 3k \end{pmatrix}$ dire per quali $k \in \mathbb{R}$ esista $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che ${}^{\mathrm{t}}M \cdot A_k \cdot M$ sia diagonale.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la quadrica $(k+1)x^2 + y^2 + 4kz^2 - 2xy - 4kxz + 2x + 1 = 0$ sia degenere, e trovarne il tipo affine per gli altri valori di k.

6. Determinare i punti in comune tra il luogo $\{[t : t+2 : t-3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $5x^2 - y^2 + xz - yz + 9x - 4y + 2 = 0$.

7. Calcolare $\int_\alpha \omega$ dove $\omega(x,y) = (x+3y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ e $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ 2t^2 - t \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 30/6/15 — Esercizî

1. Considerare $X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 8 & -10 & -8 \\ 5 & -10 & 7 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire la matrice A della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su X verificandone le proprietà caratterizzanti.

(B) (5 punti) Provare che B è diagonalizzabile, trovandone gli autovalori e i relativi autovettori.

(C) (4 punti) Dalle informazioni già a disposizione dedurre che $C_k = A + k \cdot B$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ è sempre diagonalizzabile, trovandone gli autovalori e i relativi autovettori.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 3s + s^3 \\ 1 + s^2 \\ s + s^2 - s^3 \end{pmatrix}$ e la restrizione β di α a $[0, 1]$.

(A) (2 punti) Verificare che α è semplice e regolare.

(B) (2 punti) Provare β ha lunghezza minore di $\sqrt{52}$.

(C) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. $t^2 + t - 38$

2. $k \neq -1$

3. $\pm\frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. $k = -3$

5. Degenere per $k = 0$; paraboloide iperbolico per $k < 0$; paraboloide ellittico per $k > 0$

6. $[1 : 3 : -2]$ e $[1 : 5 : -5]$

7. $\frac{23}{6}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A \cdot A = {}^{t}A = A$

(B) $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 12,\ \lambda_3 = -18$; $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\lambda_1 = 1 + 6k,\ \lambda_2 = 1 + 12k,\ \lambda_3 = -18k$; $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) La seconda componente di α assume valori uguali solo su valori opposti del parametro, nel qual caso la prima componente assume valori opposti; la prima componente di α ha derivata sempre positiva

(B) $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{18s^4 - 12s^3 + 20s^2 + 4s + 10}$ su $[0, 1]$ è minore di $\sqrt{18 + 20 + 4 + 10} = \sqrt{52}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{19}}{5\sqrt{10}},\ \tau = -\frac{12}{19}$

(D) $t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{190}}\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{28}{5}$