UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 7/6/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se in $X = \mathbb{R}_{\leqslant 7}[t]$ è dato un sistema $\mathcal{S}$ di 13 vettori, si può sempre estrarre da $\mathcal{S}$ una base di X? Se si può, quanti vettori bisogna scartare?

2. Se $f : \{z \in \mathbb{C}^9 :\ z_5 + iz_7 + 2z_9 = 0\} \to \mathbb{C}^{13}$ è lineare e non iniettiva, $f(e_1 - ie_4) = 2ie_3 + e_{13}$ e $X \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^{13}$, che dimensione può avere X?

3. Trovare $f\begin{pmatrix} 23 \\ 6 \end{pmatrix}$ dove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ con $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

4. Posto $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{3\,2}$.

5. Se in una matrice $A \in \mathcal{M}_{6\times 7}(\mathbb{R})$ è data una sottomatrice $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che tutte le orlate di B hanno determinante non nullo, quanto può valere il rango di A?

6. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $2z^2 + (5 - 2i)z + 1 - 13i = 0$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 + 2e_2 - e_3)$ determinare la proiezione su X di $7e_1 - 5e_2 + 2e_3$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 7/6/16 — Eserciziî

1. Al variare di $s \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} (4+s)x + 4y - (5+2s)z = 1 \\ 2x + (2+s)y - z = 2 - s \\ -3x + (3+s)y + z = 2 + 3s. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Discutere il numero di soluzioni del sistema al variare di s, provando in particolare che esiste un unico valore s_0 di s per il quale ne esiste più di una.

(B) (3 punti) Risolvere il sistema per $s = 1$.

(C) (3 punti) Trovare l'insieme delle soluzioni del sistema per $s = s_0$, indicando con W la sua giacitura.

(D) (3 punti) Posto $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ provare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ ed esibire la matrice A della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su U associata a tale decomposizione.

2. Considerare $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

(A) (4 punti) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare $[-e_1 + e_2 + 3e_3]_{\mathcal{B}}$.

(B) (5 punti) Trovare equazioni cartesiane del luogo

$$\{v \in \mathbb{R}^3 : \ (3,1,2) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = 0\}.$$

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche dello stesso luogo.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. Solo se $\mathcal{S}$ genera X; in tal caso, 5

2. Tra 6 e 12 compresi

3. $\begin{pmatrix} -28 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\frac{2}{7}$

5. Tra 4 e 6 compresi

6. $\frac{1}{2} + 2i, \ -3 - i$

7. $10e_1 - 3e_2 + e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Nessuna soluzione per $s = -\frac{3}{2}$, infinite per $s = s_0 = -3$, una altrimenti

(B) $x = -\frac{3}{4},\ y = \frac{3}{4},\ z = -\frac{1}{4}$

(C) $\begin{cases} y = 2 - x \\ z = 3x - 7 \end{cases} \qquad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 2 & -13 & -5 \\ -1 & 14 & 5 \\ 3 & -39 & -14 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\det(\mathcal{B}) = 1; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ -2 \end{pmatrix}$

(B) $2x - 9y + 6z = 0$

(C) $\begin{cases} x = 3t + 9s \\ y = 2s \\ z = t \end{cases}$