UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Per quali t razionali il numero $\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(5+t\sqrt{2}\right)$ è razionale?

2. Calcolare $[4e_1+7e_2-10e_3]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B}=(2e_1+e_2,\ e_1-e_3,\ e_2-3e_3)$.

3. Data $f:\{z\in\mathbb{C}^5:\ 2z_1-iz_3+(1+i)z_5=0\}\to\mathbb{C}^{13}$ lineare né nulla né iniettiva, stabilire che dimensione può avere un sottospazio $W\subseteq\mathbb{C}^{13}$ tale che $\mathbb{C}^{13}=W\oplus\mathrm{Im}(f)$.

4. Risolvere $\begin{cases} 4x+5y-2z=7 \\ 3x+y+6z=4 \\ 11x+22y-28z=9. \end{cases}$

5. Data $f:\mathbb{R}^2\to\{x\in\mathbb{R}^3:\ 2x_1-x_2+3x_3=0\}$ lineare con $f\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$, provare che f è invertibile e trovare $f^{-1}\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$.

6. Posto $X=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1+x_2+x_3=0\}$ calcolare il determinante di $f:X\to X$ data da $f(x)=\begin{pmatrix}3x_1-x_2+5x_3\\-5x_1+2x_2+x_3\\-3x_2-8x_3\end{pmatrix}$.

7. Posto $X=\mathrm{Span}(-e_1+2e_2+3e_3,\ -e_2)$ e $Y=\mathrm{Span}(2e_1-7e_2-4e_3+e_4,\ 2e_2-e_3)$, trovare la proiezione su X di $8e_2-2e_3+e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4=X\oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/16 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio W di equazione $6x - 15y + 20z = 0$.

(A) (2 punti) Esibire tutti i vettori di W aventi una componente nulla e le altre due intere e prime tra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Disporre i vettori così trovati in modo che sia decrescente la seconda componente, ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di W.

(C) (3 punti) Provare che aggiungendo a $\mathcal{B}$ il vettore $e_1 - e_2 - e_3$ si trova una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(D) (4 punti) Posto $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ trovare la seconda colonna della matrice $[f_M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t : \begin{cases} (t+1)x + (t+3)y - 2z = t - 1 \\ (1-2t)x - 12y + (t-2)z = -6 \end{cases} \qquad F_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -s \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} s+2 \\ -s \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3s+5 \\ 12 \\ 5-s \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Determinare t_0, k_0, k tali che E_t ha dimensione k_0 per $t = t_0$ e dimensione k altrimenti.

(B) (2 punti) Determinare s_0, h_0, h tali che F_s ha dimensione h_0 per $s = s_0$ e dimensione h altrimenti.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = 1$ e per $t = t_0$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_s per $s = -1$ e per $s = s_0$.

(E) (2 punti) Stabilire per quali s si ha che F_s è parallelo a E_0, ovvero a E_t per $t = 0$.

Risposte

5. ♢

1. $t = -\frac{5}{3}$

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Tra 10 e 12 estremi compresi

4. Impossibile

5. $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 \\ 31 \end{pmatrix}$

6. -38

7. $-2e_1 + 7e_2 + 6e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

(B) L'ordine è il precedente; si scarta il terzo vettore

(C) La matrice corrispondente ha determinante -1

(D) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

2.

(A) $t_0 = 5,\ k_0 = 2,\ k = 1$

(B) $s_0 = -3,\ h_0 = 1,\ h = 2$

(C) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

(D) $9x + y - 5z = 14; \quad \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$

(E) $s = \frac{16}{3}$