UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 16/2/16 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se in $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}):\ \mathrm{tr}(A)=0\}$ sono dati 3 elementi linearmente indipendenti, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ sapendo che posto $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} b \\ a-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ si ha $\left[\begin{pmatrix} 1-3a \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ b-2 \end{pmatrix}$.

3. Se $X = \{z \in \mathbb{C}^{12}:\ (1-i)z_1 + 5z_2 - 7iz_{12} = 0\}$ e $Y, Z \subset X$ sono sottospazî di dimensioni rispettive 7 e 9 tali che $Y + Z \neq X$, che dimensione può avere $Y \cap Z$?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x - 5y + 7z = 12 \\ 4x + y - 2z = -13 \\ -3x + 2y + z = 11. \end{cases}$

5. Descrivere $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):\ \det(A + {}^{t}A) = 4\det(A)\}$.

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Trovare la matrice A della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, dove $X = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2,\ 3e_2 + e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(5e_1 + e_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{C}^3$ considerare il sottospazio V di equazione $(1+i)z_1 - 2z_2 + iz_3 = 0$
e la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1-i & -3i \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Trovare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ in modo che appartengano a V i vettori
$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

(B) (3 punti) Provare che la formula $f(z) = M \cdot z$ definisce un'applicazione $f : V \to V$ lineare.

(C) (2 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ e $\mathcal{C} = (v_2, v_3)$ sono basi di V.

(D) (4 punti) Trovare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 2t & 1 \\ -5 & 1 & t+4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$

(A) (3 punti) Trovare i valori t_1 e t_2 di t, con $t_1 < t_2$ per i quali l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A_t non è iniettiva.

Porre ora $f = f_{t_1}$, ovvero $f = f_t$ per $t = t_1$, nonché $K = \operatorname{Ker}(f)$ e $W = \operatorname{Im}(f)$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di K e cartesiane di W.

(C) (3 punti) Provare che $\mathbb{R}^3 = K \oplus W$ e dedurne che la restrizione di f a W definisce un'applicazione $g : W \to W$ invertibile.

(D) (3 punti) Trovare la proiezione su W del vettore $11e_1 + 8e_2 - 20e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = K \oplus W$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. 5

2. $a = 6,\ b = -1$

3. 6 o 7

4. $x = -2,\ y = 1,\ z = 3$

5. È lo spazio delle matrici 2×2 simmetriche

6. 121 e -83

7. $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -30 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\alpha_1 = 1 - i,\ \alpha_2 = i,\ \alpha_3 = 2i$

(B) Posto $\omega = (1+i, -2, i)$ si ha $\omega \cdot M = -i \cdot \omega$.

(C) Sono coppie di vettori linearmente indipendenti di V, che ha dimensione 2

(D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i & 2-4i \\ 3+3i & i-3 \end{pmatrix}$

2.

(A) $t_1 = 2,\ t_2 = \frac{26}{11}$

(B) $K = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $W:\ 33x + 29y + 23z = 0$

(C) $K \cap W = \{0\}$; la g è ben definita e iniettiva, dunque è surgettiva

(D) $6e_1 + 13e_2 - 25e_3$