Esercizî di Matematica
Scienze Biologiche 15/16 – Corso A

(Carlo Petronio)

Foglio dell'11/5/2016

La variabile aleatoria geometrica X di parametro p ha come eventi i numeri naturali e $p(X = k)$ è la probabilità che ci sia un successo dopo k fallimenti in un certo esperimento, dove in ogni singolo esperimento la probabilità di successo è p. Si ha:

$$p(X = k) = (1 - p)^k \cdot p, \qquad \mu(X) = \frac{1-p}{p}, \qquad \sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Nota: nello svolgere l'esercizio successivo io mi sono attenuto alla definizione precedente. Se invece, come da tradizione, si numerano gli esperimenti a partire da 1 invece che da 0, gli eventi diventano i numeri naturali positivi, l'espressione della probabilità diventa $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$, e la media diventa $\frac{1}{p}$.

Esercizio 1

- Trovare il parametro p della variabile geometrica X tale che

  $$p(X = 2) = 9 \cdot p(X = 4),$$

  quindi calcolarne media a varianza.

- Posto $Z = X + Y$ dove Y è una variabile geometrica di parametro $\frac{1}{2}$, calcolare la distribuzione di probabilità di Z.

Chiamiamo distribuzione di probabilità continua X una nella quale X può assumere qualsiasi valore reale e si misura la probabilità $p(X \in [a,b])$ che X assuma valori in un intervallo $[a,b]$ (o in una semiretta), espressa in uno dei modi seguenti:

- $p(X \in [a,b]) = F(b) - F(a)$ dove $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ è una funzione non decrescente con limite 0 in $-\infty$ e 1 in $+\infty$; quando $[a,b]$ è illimitato da una parte o da entrambe le espressioni $F(a)$ e/o $F(b)$ sono intese come limiti;
- $p(X \in [a,b]) = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa integrabile su ogni intervallo e tale che l'integrale improprio $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ esiste e vale 1; quando $[a,b]$ è illimitato da una parte o da entrambe l'integrale si intende in senso improprio.

Chiamiamo F funzione di ripartizione della distribuzione X, e f funzione di densità. Conoscendo una delle due si trova l'altra tramite le formule

$$f(x) = F'(x), \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si definiscono la media e la varianza di X come

$$\mu(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \sigma^2(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu(X))^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si ha quindi $\sigma^2(X) = \mu(X^2) - \mu(X)^2$, dove $\mu(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

La mediana di X è il valore m tale che $p(X \geqslant m) = p(X \leqslant m)$, ovvero quello per cui $F(m) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2 Provare che la f data è la funzione di densità di una distribuzione continua di probabilità X, calcolando l'associata funzione di ripartizione:

- $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$;
- $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2|x|+x^2}$.

Esercizio 3 Dire se una delle seguenti condizioni sulla funzione F di ripartizione di una distribuzione continua di probabilità X garantisca che $\mu(X) = 0$:

- $F(0) = \frac{1}{2}$;
- $F(x) + F(-x) = 1$ per ogni $x \geqslant 0$;
- $F(x) = F(-x)$ per ogni $x \geqslant 0$.

Esercizio 4 Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione assegnata è la funzione di densità di una distribuzione continua di probabilità:

- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \leqslant 0 \\ c \cdot \mathrm{e}^{-5x} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} c(x^2 + x + 2) & \text{per} \quad |x| \leqslant 3 \\ 0 & \text{per} \quad |x| > 3 \end{cases}$

Esercizio 5 Verificare che la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{1+81x^4} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

è la funzione di ripartizione di una distribuzione continua di probabilità X, e calcolare la mediana di X.

Esercizio 6 Trovare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{per} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{per} \quad x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

è la funzione di densità di una distribuzione continua di probabilità X con $\mu(X) = \frac{3}{5}$, quindi calcolare $\sigma^2(X)$ e l'espressione della corrispondente funzione di partizione.