UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 7/6/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Se $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ rappresenta una rotazione intorno a una retta di angolo $\frac{\pi}{6}$, quanto vale $\mathrm{tr}(M)$?

3. Trovare i punti del luogo $\{[6-t : 2t-5 : 3-t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ che sono punti all'infinito del luogo di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $4x^2 - y^2 + 5xz - yz + 14x - 7z = 11$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $y^2 + xy - 8xz + yz - z = 0$.

5. Calcolare $\int\limits_\alpha (4z-7)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2+t \\ t+2 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\int\limits_\alpha (2x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-2t-t^2 \\ 5t-t^3 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare $\int\limits_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-t-t^2 \\ 1-10t+9t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 7/6/16 — Eserciz$\hat{\imath}$

1. Al variare di $s,t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} s & t^2 & t+5 \\ t+2 & -1 & 2 \\ 2t^2-1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Stabilire per quali s,t esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori di M.

(B) (3 punti) Stabilire per quali s,t vale quanto richiesto nel punto (A) e $\det(M) = 0$.

(C) (3 punti) Per s,t come nel punto (B) determinare i segni degli autovalori di M.

(D) (3 punti) Per s,t come nel punto (B) trovare un generatore v di $\mathrm{Im}(M)^{\perp}$ e giustificare il fatto che $M \cdot v = 0$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & -1 \\ 2k^2-3k-12 & 4-k & k^2+k-9 \\ 2k^2-k-17 & -2 & k^2-3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A) = -k^4 + 6k^3 + 12k^2 - 30k - 35$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(-1) = k^4 - 6k^3 - 20k^2 + 24k + 64$ calcolare $p_A(t)$.

(C) (2 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $k^2 - 5$ trovare gli altri.

(D) (5 punti) Al variare di k trovare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di A, stabilendo se essa sia diagonalizzabile o meno.

Risposte

5. ♢

1. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4;\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $1 + \sqrt{3}$

3. $[2 : 3 : -1]$ e $[2 : -11 : 5]$

4. Iperboloide iperbolico (a una falda)

5. $\frac{7}{3}\sqrt{14} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$

6. $\frac{63}{10}$

7. $-\frac{5}{4}\pi$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $t = 2$, ogni s

(B) $t = 2$, $s = 9$

(C) Uno positivo, uno negativo e uno nullo

(D) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; se w e z sono autovettori relativi agli autovalori non nulli, allora $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Span}(w, z)$, dunque v è un autovettore relativo all'autovalore nullo

2.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa meno la terza e poi la terza colonna con sé stessa più la seconda si conclude facilmente

(B) $t^3 - (k^2 + 3)t^2 + (7k^2 + 6k - 33)t - (-k^4 + 6k^3 + 12k^2 - 30k - 35)$

(C) $k + 1$ e $7 - k$

(D) Per k diverso da -4, -2 e 3 tre autovalori distinti: diagonalizzabile;
per $k = -4$ autovalore 11 doppio con molteplicità geometrica 1: non diagonalizzabile;
per $k = -2$ autovalore -1 doppio con molteplicità geometrica 1: non diagonalizzabile;
per $k = 3$ autovalore 4 triplo con molteplicità geometrica 2: non diagonalizzabile