UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dire se $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile. Spiegare.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $3e_1 + 5e_2 - 2e_3$, unitarî e con somma delle coordinate nulla.

3. Dire quanti sono i punti all'infinito dell'insieme
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(y^2 - 4x^2 - \sqrt{5}\right) \cdot \left(2x + y - \sqrt{7}\right) \cdot \left(x + 2y - \sqrt{3}\right) = 0\right\}$. Spiegare.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $(2 - t)x^2 + 2txy + y^2 + 4x + 2 = 0$ sia un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2 - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)xz + 2yz + 2y + 2z = 0$.

6. Determinare la matrica hessiana nell'origine della funzione $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+3y^2-5\sin(xy)}$
e i segni dei suoi autovalori.

7. Stabilire per quali $k, h \in \mathbb{R}$ sia chiusa la forma $xy^2\left(\left(8x^2y + ky^2\right)\mathrm{d}x + \left(hx^3 - 10xy\right)\mathrm{d}y\right)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/16 — Esercizî

1.

(A) (2 punti) Provare che se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile allora anche $k \cdot \mathrm{I}_n + h \cdot A$ lo è per ogni $k, h \in \mathbb{K}$.

(B) (2 punti) Provare che se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è normale allora anche $k \cdot \mathrm{I}_n + h \cdot A$ lo è per ogni $k, h \in \mathbb{C}$.

(C) (4 punti) Provare che $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 1+i & 1-2i \end{pmatrix}$ è normale e trovare il modulo dei suoi autovalori.

(D) (4 punti) Trovare gli autovalori della matrice A del punto precedente.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 1-2s^2 \\ 3s-2s^3 \\ s-s^2 \end{pmatrix}$ e la restrizione β di α a $[0,1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice.

(B) (1 punto) Provare che α è regolare.

(C) (5 punti) Determinare curvatura, torsione e riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}z$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\beta \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. No, ha l'autovalore 2 doppio con m.g. 1

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{78}}(-7e_1 + 5e_2 + 2e_3)$

3. Tre. La prima delle due rette ha all'infinito un punto che è all'infinito anche per l'iperbole

4. $-2 < t < -1$ e $0 < t < 1$

5. Iperboloide iperbolico (a una falda)

6. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; discordi

7. $k = -5,\ h = 6$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Una base che diagonalizza A diagonalizza anche $k \cdot \mathrm{I}_n + h \cdot A$

(B) Una base ortonormale che diagonalizza A diagonalizza anche $k \cdot \mathrm{I}_n + h \cdot A$

(C) $\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot A$ è unitaria, dunque A è normale e i suoi autovalori hanno modulo $\sqrt{7}$

(D) $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}-i\left(3+\sqrt{5}\right)\right),\ \left(3+\sqrt{5}-i\left(3-\sqrt{5}\right)\right)$

2.

(A) Se $\alpha(s') = \alpha(s)$ con $s' < s$ la prima componente di α dice che $s' = -s$, allora la seconda dice che $s = \sqrt{3/2}$, ma allora la terza componente dà una contraddizione.

(B) La prima componente di $a'(s)$ si annulla solo per $s = 0$, dove non si annullano le altre.

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{7\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
$\kappa = \frac{7}{5\sqrt{10}},\ \tau = \frac{12}{49}$

(D) $-\frac{1}{5}$

(E) $\frac{3}{4}\pi$