Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dire se $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile. Spiegare.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $7e_1 - 5e_2 - 2e_3$, unitarî e con somma delle coordinate nulla.

3. Dire quanti sono i punti all'infinito dell'insieme
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \left(x^2 + 4xy + 4y^2 - \sqrt{5} \cdot x\right) \cdot \left(2x + y - \sqrt{7}\right) \cdot \left(x + 2y - \sqrt{3}\right) = 0\right\}$. Spiegare.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $tx^2 + 2(2-t)xy + y^2 + 4x + 2 = 0$ sia un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2 - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)xz + 2yz - 2x - 4z = 0$.

6. Determinare la matrica hessiana nell'origine della funzione $f(x, y) = \mathrm{e}^{3x+y^2-2\sin(xy)}$
e i segni dei suoi autovalori.

7. Stabilire per quali $k, h \in \mathbb{R}$ sia chiusa la forma $xy^2\left(\left(4x^2y + ky^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(hx^3 - 14xy\right)\,\mathrm{d}y\right)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/16 — Esercizî

1.

(A) (2 punti) Provare che se $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile allora anche $\lambda \cdot \mathrm{I}_n + \mu \cdot M$ lo è per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(B) (2 punti) Provare che se $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è normale allora anche $\lambda \cdot \mathrm{I}_n + \mu \cdot M$ lo è per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(C) (4 punti) Provare che $M = \begin{pmatrix} 3-i & 1+i \\ 1+i & 1-3i \end{pmatrix}$ è normale e trovare il modulo dei suoi autovalori.

(D) (4 punti) Trovare gli autovalori della matrice M del punto precedente.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 3s - 2s^3 \\ s - s^2 \\ 1 - 2s^2 \end{pmatrix}$ e la restrizione β di α a $[0,1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice.

(B) (1 punto) Provare che α è regolare.

(C) (5 punti) Determinare curvatura, torsione e riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta z\,\mathrm{d}y$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\beta \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. Sì, ha l'autovalore 2 doppio con m.g. 2 e quello semplice 3

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(e_1 + 3e_2 - 4e_3)$

3. Due. La seconda delle due rette ha all'infinito lo stesso punto della parabola

4. $1 < t < 2$ e $3 < t < 4$

5. Iperboloide ellittico (a due falde)

6. $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; positivi

7. $k = -7,\ h = 3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Una base che diagonalizza M diagonalizza anche $\lambda \cdot \mathrm{I}_n + \mu \cdot M$

(B) Una base ortonormale che diagonalizza M diagonalizza anche $\lambda \cdot \mathrm{I}_n + \mu \cdot M$

(C) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot M$ è unitaria, dunque M è normale e i suoi autovalori hanno modulo $2\sqrt{3}$

(D) $2 - \sqrt{2} - i\left(2 + \sqrt{2}\right),\ 2 + \sqrt{2} - i\left(2 - \sqrt{2}\right)$

2.

(A) Se $\alpha(s') = \alpha(s)$ con $s' < s$ la terza componente di α dice che $s' = -s$, allora la prims dice che $s = \sqrt{3/2}$, ma allora la seconda componente dà una contraddizione.

(B) La terza componente di $a'(s)$ si annulla solo per $s = 0$, dove non si annullano le altre.

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{7\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -20 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\kappa = \frac{7}{5\sqrt{10}},\ \tau = -\frac{12}{49}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $-\pi$