UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 29/1/16 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con $\mathrm{tr}(A) = -4$ e $\det(A) = 9$ calcolare $p_A(t)$ sapendo che $p_A(1) = 3$.

2. Per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che ${}^{\mathrm{t}}M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

3. Trovare i punti di intersezione tra il luogo $\{[2t+1 : t+1 : t+4] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$
e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $-2xy + 2y^2 + z^2 - \sqrt{3}x = 11$.

4. Provare che la quadrica di equazione $x^2 + ky^2 + (k^2+1)z^2 + 2y - 2kz + 1 = 0$
non è mai degenere, e trovarne il tipo affine al variare di $k \in \mathbb{R}$.

5. Trovare la giacitura della retta tangente alla curva di equazione $x^3 - 3xy^2 = 2$
nel suo punto di ascissa 2 e ordinata positiva.

6. Calcolare $\int_\alpha \left((x+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y)\,\mathrm{d}y\right)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = (t^2-1, 2-t^2)$.

7. Calcolare $\int_\alpha (x + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y$ con $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 29/1/16 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 4k^2+7k+7 & -k^2-2k-1 & -k^2-3k-2 \\ 4k^2+8k+4 & 3-k & -2k^2-6k-4 \\ 4k^2+8k+6 & -k^2-3k-3 & -k^2-2k+3 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Sapendo che $\det(M) = 2k^5+13k^4+26k^3+64k^2+60k+75$ e che $p_M(1) = -2k^5-11k^4-20k^3-38k^2-32k-32$ trovare $p_M(t)$.

(B) (4 punti) Sapendo che M ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = 2k^2+3k+5$ trovare gli altri due.

(C) (2 punti) Stabilire per quali k la M ha un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di 1, calcolando tale molteplicità.

(D) (3 punti) Per i k trovati al punto precedente, trovare la molteplicità geometrica dell'autovalore avente molteplicità algebrica maggiore di 1.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare un generatore v_3 di $\mathrm{Span}(v_1, v_2)^\perp$ con le componenti intere e prime fra loro, di cui la prima positiva.

(B) (3 punti) Ortonormalizzare la base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$, chiamando w_1, w_2, w_3 la base ottenuta.

(C) (3 punti) Posto $A = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ provare che $A \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{I}_3$.

(D) (4 punti) Trovare c, s, ε tali che esista $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $M \cdot {}^{\mathrm{t}}M = \mathrm{I}_3$ e ${}^{\mathrm{t}}M \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $t^3 + 4t^2 + 7t - 9$

2. $a = \pm\sqrt{38}$

3. $[3 : 1 : -2]$ e $[17 : 9 : 12]$

4. La matrice associata ha determinante $-k^2+k-1$ sempre negativo. Ellissoide per $k > 0$, paraboloide ellittico per $k = 0$, iperboloide ellittico per $k < 0$

5. $\text{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. 3

7. π

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $p_M(t) = t^3 - (3k^2+4k+13)t^2 + (2k^4+6k^3+29k^2+32k+55)t - 2k^5 - 13k^4 - 26k^3 - 64k^2 - 60k - 75$

(B) $\lambda_2 = k+5,\ \lambda_3 = k^2+3$

(C) $k = -2,\ -1,\ 0,\ 2$; rispettivamente $2,\ 3,\ 2,\ 2$

(D) Rispettivamente $1,\ 2,\ 1, 1$

2.

(A) $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$

(B) $w_1 = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{1387}} \begin{pmatrix} 33 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{146}} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$

(C) È ortogonale perché le sue colonne sono una base ortonormale

(D) $\varepsilon = -1,\ c = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{38}} + \frac{17}{\sqrt{1387}} - \frac{7}{\sqrt{146}} + 1\right),\ s = \pm\sqrt{1-c^2}$