



1. Per quali  $t$  razionali si ha che  $(2 - \sqrt{3}) \cdot (t - \sqrt{3})$  è razionale?
2. Determinare  $[5e_1 - 16e_2]_{\mathcal{B}}$  dove  $\mathcal{B} = (-5e_1 + 2e_2, 4e_1 - 3e_2)$ .
3. Se  $f : \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}^5$  è lineare e  $\text{Im}(f)$  contiene  $(1 - i)e_1 + 4e_5$  ma non contiene  $2ie_3 + (3 + i)e_4$ , che dimensione può avere  $\text{Ker}(f)$ ?
4. Risolvere 
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 11 \\ 4x + 2y + z = 3 \\ 2x - 7y + 3z = 28. \end{cases}$$
5. Se  $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & 5 \end{pmatrix}$  calcolare  $(A^{-1})_{2,1}$ .
6. Se  $A = (v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  e  $\det(A) = 5 - 2i$ , quanto vale  $\det(3iv_1 + (1 - i)v_2, (1 + 2i)v_1 + 2v_2)$ ?
7. Posto  $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\}$  e  $Y = \text{Span}(e_1 + 2e_2 + e_3)$  determinare la proiezione su  $X$  di  $3e_1 - 2e_2 + e_3$  rispetto alla decomposizione  $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ .

---

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦

---



1. In  $\mathbb{R}^3$  considerare il sottospazio

$$W = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \text{ e il vettore } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ -37 \end{pmatrix}$$

- (A) (3 punti) Estrarre dai generatori di  $W$ , nell'ordine assegnato, una base  $\mathcal{B}$  di  $W$ .
- (B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di  $W$ .
- (C) (3 punti) Provare che  $v$  appartiene a  $W$  e trovare  $[v]_{\mathcal{B}}$
- (D) (3 punti) Data  $f : X \rightarrow X$  lineare con  $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$  trovare  $f(v)$ .

2. In  $\mathbb{R}^3$  considerare i sottospazi affini

$$E = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad F_t = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ t \end{pmatrix} + \text{Span} \left( \begin{pmatrix} t+2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2-t \end{pmatrix} \right) \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

- (A) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di  $E$ .
- (B) (2 punti) Trovare la dimensione di  $F_t$  al variare di  $t$ .
- (C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di  $F_t$  per  $t = 3$ .
- (D) (4 punti) Discutere la posizione reciproca di  $E$  ed  $F_t$  al variare di  $t$ .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



## Risposte ai quesiti

5.  $\diamond$ 

1.  $t = -2$

2.  $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. Tra 4 e 7 compresi

4.  $x = 2, y = -3, z = 1$

5.  $\frac{5}{3}$

6.  $31i - 5$

7.  $-2(e_1 + 6e_2 + 2e_3)$

---

1.  $\spadesuit$  2.  $\heartsuit$  3.  $\spadesuit$  4.  $\clubsuit$  5.  $\diamond$  6.  $\spadesuit$  7.  $\clubsuit$  8.  $\heartsuit$  9.  $\clubsuit$  10.  $\diamond$

---



## Soluzioni degli esercizi

5.  $\diamond$ 

1.

(A)  $\mathcal{B} = \left( \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right) \right)$

(B)  $27x + 26y + 19z = 0$

(C)  $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -29 \\ 34 \end{pmatrix}$

2.

(A)  $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 5y - z = 17 \end{cases}$

(B) Sempre 2: vettori che generano la sua giacitura sono sempre linearmente indipendenti

(C)  $2x + 3y + 11z = 33$

(D)  $E$  giace su  $F_t$  per  $t = -1$ ; sono paralleli per  $t = -28$ ; altrimenti sono incidenti in un punto