UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 10/1/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Un sistema di 8 vettori in $X = \{x \in \mathbb{R}^8 : \ 3x_2 = 5x_7\}$ può essere linearmente indipendente? Può generare? Spiegare.

2. Provare che $\mathcal{B} = (-e_1 + e_2 + e_3,\ 2e_1 + 3e_2 + e_3)$ è una base di $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ e che $v = 5e_2 + 3e_3$ appartiene a V, quindi calcolare $[v]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $Z, W \subset \mathbb{C}^9$ sono sottospazî vettoriali di dimensioni rispettive 5 e 6 tali che $Z + W \neq \mathbb{C}^9$, che dimensione può avere $Z \cap W$?

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} (9-t)x + (t-3)y = -2 \\ -15x + (t+7)y = 2 - t. \end{cases}$

5. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \mathrm{Span}(e_1 + 3e_2 + e_3,\ e_2 + e_3 + e_4)$ e $Y_t = \mathrm{Span}(-e_1 + e_2 + 2e_4,\ te_2 + e_3 - e_4)$ dire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y_t$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

$$v = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{A}$ è base di un sottospazio vettoriale X di $\mathbb{R}^4$.

(B) (1 punto) Provare che $\mathcal{B}$ è base di un sottospazio vettoriale Y di $\mathbb{R}^4$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane per X.

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane per Y.

(E) (3 punti) Provare che v appartiene a X e trovare $[v]_{\mathcal{A}}$.

(F) (3 punti) Detta $f : X \to Y$ l'applicazione lineare tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = M$, determinare $f(v)$.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazî vettoriali

$$T = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0\}, \quad S = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + 4e_3).$$

(A) (3 punti) Provare che $\mathbb{R}^3$ si decompone come somma diretta $T \oplus S$.

(B) (3 punti) Trovare la matrice Q della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su T rispetto a tale decomposizione.

(C) (3 punti) Verificare la proprietà caratterizzante di Q come matrice di una proiezione.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. Poiché X ha dimensione 7, può generare ma non può essere linearmente indipendente

2. V ha dimensione 2 e $\mathcal{B}$ contiene 2 vettori linearmente indipendenti che soddisfano l'equazione che definisce V; il vettore v soddisfa l'equazione che definisce V; $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Tra 3 e 5 compresi

4. Nessuna per $t = 18$, infinite per $t = -1$, una altrimenti

5. -43

6. -24 e -46

7. $t \neq -5$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) Gli elementi di $\mathcal{A}$ sono linearmente indipendenti

(B) Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti

(C) $4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$

(D) $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(E) $[v]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(F) $\begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix}$

2.

(A) Il generatore di S non soddisfa l'equazione di T, dunque $T \cap S = \{0\}$, e la somma delle dimensioni di T e S fa 3

(B) $Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

(C) $Q \cdot Q = Q$