



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $Z = \{z \in \mathbb{C}^8 : (3+2i)z_3 = (2-i)z_7, (5-i)z_3 = (1-3i)z_7\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base di Z ?

2. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 2x_2 + 7x_4 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^9$ è lineare e non iniettiva, che dimensione può avere $\text{Im}(f)$?

3. Date $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$
e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare
tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcolare $f \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Data $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ lineare tale che $f \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Quanto può valere il rango di una matrice 3×3 avente una e una sola sottomatrice 2×2 con determinante non nullo? Spiegare.

6. Risolvere $2iz^2 + (5-i)z + 1 - 3i = 0$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(-e_1 + 2e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione su X di $5e_1 - e_2 + 3e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - 17y + 8z + (t - 1)w = -11 \\ x + (t - 8)y + 2z + w = 5 \\ 7x - 29y + 14z + 3(t - 2)w = t. \end{cases}$$

- (A) (2 punti) Per $t = 0$ risolvere il sistema omogeneo associato a quello assegnato.
- (B) (3 punti) Provare che esistono due valori $t_1 < t_2$ di t per i quali la matrice incompleta del sistema ha rango minore di 3.
- (C) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = t_1$.
- (D) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = t_2$.
- (E) (1 punto) Descrivere la natura dell'insieme delle soluzioni del sistema per $t \neq t_1, t_2$.

2. Considerare $U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $V = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- (A) (2 punti) Provare che si ha $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.
- (B) (3 punti) Determinare le proiezioni su U e V del vettore e_1 rispetto a tale decomposizione.
- (C) (5 punti) Determinare la matrice M della proiezione su U rispetto a tale decomposizione.
- (D) (2 punti) Verificare la proprietà caratterizzante di M come matrice di una proiezione.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte ai quesiti

5. \diamond

1. 4

2. Tra 0 e 2

3. $\begin{pmatrix} -15 \\ 38 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 + 3i \\ -i \end{pmatrix}$ 5. Vale 2. Se valesse 3, comunque prese due colonne della matrice esse conterrebbero una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo6. $z = \frac{1}{2}(i - 1)$, $z = 1 + 2i$ 7. $7e_1 - 5e_2 + e_3$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni degli esercizi

5. \diamond

1.

(A) $s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $s \in \mathbb{R}$

(B) $t_1 = 3, t_2 = 4$

(C) Impossibile

(D) $\begin{pmatrix} 129 \\ 31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

(E) Una retta affine parallela a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.

(A) La matrice formata dai 4 vettori assegnati come generatori di U e di V ha determinante -1

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(C) $M = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & 10 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $M \cdot M = M$