Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 16/2/17 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dati 11 generatori di $Z = \{z \in \mathbb{C}^7 : (3+2i)z_3 = (2+i)z_7,\ (5-i)z_3 = (3-i)z_7\}$, quanti bisogna toglierne per ottenere una base di Z?

2. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^9 :\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 0\} \to \mathbb{R}^4$ è lineare e $f(e_4) = -6e_3$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

3. Date $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare
tale che $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, calcolare $f\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. Data $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineare tale che $f\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Se $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e si sa che una e una sola sottomatrice 2×2 di M ha determinante non nullo, quanto può valere $\mathrm{rank}(M)$?

6. Risolvere $3iz^2 + (4-2i)z - 2i = 0$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione su X di $3e_1 - e_2 + e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(A) (2 punti) Provare che si ha $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

(B) (3 punti) Determinare le proiezioni su U e V del vettore e_1 rispetto a tale decomposizione.

(C) (5 punti) Determinare la matrice M della proiezione su U rispetto a tale decomposizione.

(D) (2 punti) Verificare la proprietà caratterizzante di M come matrice di una proiezione.

2. Considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - 17y + 8z + (t-1)w = -11 \\ x + (t-8)y + 2z + w = 5 \\ 7x - 29y + 14z + 3(t-2)w = t. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Per $t = 0$ risolvere il sistema omogeneo associato a quello assegnato.

(B) (3 punti) Provare che esistono due valori $t_1 < t_2$ di t per i quali la matrice incompleta del sistema ha rango minore di 3.

(C) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = t_1$.

(D) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = t_2$.

(E) (1 punto) Descrivere la natura dell'insieme delle soluzioni del sistema per $t \neq t_1, t_2$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. 5

2. Tra 4 e 7 compresi

3. $\begin{pmatrix} 42 \\ -5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -i \\ 2+3i \end{pmatrix}$

5. Vale 2. Se valesse 3, comunque prese due colonne di M esse conterrebbero una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo

6. $z = \frac{1}{3}(i-1),\ z = 1+i$

7. $5e_1 + e_2 + 3e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli eserciziî

5. ♡

1.

(A) La matrice formata dai 4 vettori assegnati come generatori di U e di V ha determinante -1

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(C) $M = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & 10 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $M \cdot M = M$

2.

(A) $s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $s \in \mathbb{R}$

(B) $t_1 = 3,\ t_2 = 4$

(C) Impossibile

(D) $\begin{pmatrix} 129 \\ 31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

(E) Una retta affine parallela a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$