UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 27/6/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 15 generatori di $Z = \{z \in \mathbb{C}^9 : \ (4+i)z_2 = (3-2i)z_9\}$,
quanti bisogna scartarne per avere una base di Z?

2. Se $f : \mathbb{R}^8 \to \{x \in \mathbb{R}^5 : \ 3x_1 + 4x_3 + x_5 = 0\}$ è lineare e $f(e_6) = e_1 + e_2 - e_3 + e_5$,
che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

3. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $f : X \to X$ data da
$f(x) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 17 & 12 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4. Data $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 1+2i & i-3 \end{pmatrix}$ calcolare $\left(A^{-1}\right)_{2,1}$.

5. Se in una matrice $A \in \mathcal{M}_{6\times5}(\mathbb{R})$ una sottomatrice 3×3 è invertibile e tutte le sue orlate sono non invertibili, si può stabilire il rango di A? In caso affermativo, quanto vale?

6. Risolvere $6iz^2 + (1-3i)z + 2(i-1) = 0$.

7. Se $X = \mathrm{Span}(3e_1 + e_2 - e_3, \ -e_1 + 5e_2 + 2e_3)$ e $Y_t = \mathrm{Span}(te_1 + 2e_2 - 2e_3)$,
per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y_t$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 27/6/17 — Esercizî

1. Considerare

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}, \quad v = -2e_1 + 3e_2 + e_3,$$

$$\mathcal{B} = (e_1 + e_2 + e_3,\ 7e_1 + 2e_2 + 4e_3), \quad \mathcal{C} = (6e_1 + e_2 + 3e_3,\ 10e_1 - 5e_2 + e_3).$$

(A) (3 punti) Provare che v appartiene a X e che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di X.

(B) (3 punti) Trovare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{C}$.

(C) (3 punti) Trovare la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ verificando poi la regola di cambio di coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ per v.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio $Y = \mathrm{Span}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ e, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il sottospazio X_t di equazioni $\begin{cases} (t-3)x + (t-1)y + (4-2t)z + (5-t)w = 0 \\ (1-t)x + (2t-23)y + (2t+1)z + (t-4)w = 0. \end{cases}$

(A) (3 punti) Determinare $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ e t_0 in $\mathbb{R}$ tali che $\dim(X_t) = \begin{cases} n_0 & \text{per } t = t_0 \\ n_1 & \text{per } t \neq t_0. \end{cases}$

(B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di X_{t_0}.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di X_1.

(D) (3 punti) Provare che $Y \oplus X_1 = \mathbb{R}^4$.

(E) (3 punti) Determinare la proiezione su X_1 di $17e_1 + 3e_2 + 25e_3 - 5e_4$ rispetto alla decomposizione precedente.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. 7

2. Tra 4 e 7 compresi

3. $\begin{pmatrix} 16 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{5}(4+3i)$

5. Sì, vale 3

6. $z_1 = \frac{2}{3}i,\ z_2 = \frac{1}{2}(1-i)$

7. $t \neq 6$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) Tutti e 5 i vettori dati soddisfano l'equazione che definisce X; inoltre X ha dimensione 2 e sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$ contengono due vettori linearmente indipendenti

(B) $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot M$ con $M = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $[v]_{\mathcal{C}} = M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

2.

(A) $n_0 = 3$, $n_1 = 2$, $t_0 = 7$

(B) $s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) $s_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

(D) La matrice formata dalla base assegnata di Y e dalla base precedente di X_1 ha determinante 70

(E) $14e_1 + 5e_2 + 28e_3 - 7e_4$