UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/17 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Per quali numeri razionali α si ha che $\alpha \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)$ è razionale? Spiegare.

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ è lineare non surgettiva e $f(2e_2 + e_8) = 3e_3 + e_4$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + y - 5z = 1 \\ 3x + 7y - 2z = 8. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2,1}$.

6. Sapendo che $\det(v_1, v_2, v_3) = -\frac{1}{17}$ calcolare $\det(2v_1 - 3v_2, 4v_2 - v_3, -2v_1 + 5v_3)$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 7x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_2 + e_3)$ calcolare la proiezione su X di $3e_1 + 2e_2 + 2e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/17 — Esercizî

1. Considerare $V = \{x \in \mathbb{R}^5 : 6x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 9x_4 - 15x_5 = 0\}$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che è possibile completare (v_1, v_2) a una base di V.

(B) (3 punti) Elencare i vettori di V con le seguenti proprietà: le componenti di indice pari sono nulle; tra le componenti di indice dispari, una è nulla e le altre due sono intere prime fra loro, con la prima delle due positiva.

(C) (4 punti) Detti v_3, v_4, v_5 i vettori del punto (B) ordinati in modo che sia crescente la somma delle coordinate, estrarre da $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ una base $\mathcal{B}$ di V.

(D) (3 punti) Se $f : \mathbb{R}^2 \to V$ è lineare e $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}^{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 8 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare $f(e_1 + e_2)$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t : \begin{cases} (t+4)x - (2t+3)y + (t-1)z = -(3t+2) \\ (2-t)x + ty + (t-8)z = t+2 \end{cases} \qquad F_s = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 4 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} s+2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s-2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Trovare l'unico valore t_0 di t per il quale E_t non è una retta.

(B) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = t_0$.

(C) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = -2$.

(D) (2 punti) Provare che F_s è sempre un piano.

(E) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_s per $s = 3$.

(F) (2 punti) Determinare la posizione reciproca di $E_{(-2)}$ ed F_3.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/17 — Quesiti

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. Solo $\alpha = 0$. Infatti se α e $\alpha \cdot (1 + \sqrt{2})$ fossero razionali con $\alpha \neq 0$ il numero $\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\alpha \cdot (1 + \sqrt{2}) - \alpha\right) = \sqrt{2}$ sarebbe razionale, il che è falso.

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 7 compresi

4. $x = -4, \ y = 2, \ z = -3$

5. $\frac{1}{4}$

6. -2

7. $6e_1 + 8e_2 + 5e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) v_1 e v_2 soddisfano l'equazione che definisce V e sono linearmente indipendenti.

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) L'ordine è il precedente; $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

(D) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.

(A) $t_0 = 6$

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

(C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\det\begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} = 0$ per $s = \pm 1$ ma in tal caso $\det\begin{pmatrix} s+2 & s-2 \\ 1 & s \end{pmatrix} \neq 0$

(E) $4x + y - 7z = -21$

(F) Paralleli tra loro