UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/6/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Che tipo di isometria di $\mathbb{R}^3$ è associata a una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $\det(A) = 1$ e $\mathrm{tr}(A) = 2$.

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha che $[2 - 3t : 4t - 1 : t + 1]$ e $[t + 2 : -2t - 1 : t - 7]$ sono lo stesso punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

4. Determinare il tipo affine della quadrica $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy - 2yz + 2x + 4y - 2z = 0$.

5. Stabilire in quali $t \in \mathbb{R}$ la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ t^3 - 6t + 1 \end{pmatrix}$ ha curvatura positiva.

6. Calcolare $\int_\alpha x \, \mathrm{d}y$ con $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ t + \cos(t) \end{pmatrix}$.

7. Calcolare $\int_\alpha \left(y^2 \, \mathrm{d}x + \left(x - \ln\left(\frac{1+y^4}{1+y^2}\right)\right) \mathrm{d}y\right)$ con $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/6/17 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$X_t = \mathrm{Span}(-te_1 + (t-4)e_2 + (t+10)e_3,\ (t-1)e_1 + (1-4t)e_2 + (5t-2)e_3).$$

(A) (2 punti) Determinare l'unico valore $\overline{t}$ di t per il quale X_t non è un piano.

(B) (2 punti) Calcolare la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su $X_{\overline{t}}$ (cioè su X_t per il valore $\overline{t}$ trovato al punto precedente).

(C) (4 punti) Calcolare le matrici A e B delle proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente su X_1 e su X_0 (cioè su X_t per $t = 1$ e per $t = 0$).

(D) (2 punti) Provare che $A + kB$ è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(E) (2 punti) Provare che $A - B$ ha l'autovalore 0. [Suggerimento: non fare i calcoli, che sono difficili.]

2. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 & 3 \\ 2+2i & 2i & 3i \\ z-i & 1+iz & z \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A) = 2iz$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(1) = (z-1)(1-i)$ determinare $p_A(t)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore 2 determinare gli altri.

(D) (3 punti) Stabilire per quali z la matrice A è diagonalizzabile.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -1;\ v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ intorno a una retta

3. $t = 4$

4. Iperboloide iperbolico (a una falda)

5. $1 < t < 2$

6. $\frac{1}{6}$

7. π

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) $\bar{t} = -2$

(B) $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 9 & -12 \\ 4 & -12 & 16 \end{pmatrix}$

(C) $A = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 2 & -8 & -8 \\ -8 & 65 & -1 \\ -8 & -1 & 65 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 29 & -5 & -2 \\ -5 & 5 & -10 \\ -2 & -10 & 26 \end{pmatrix}$

(D) È simmetrica

(E) X_0 e X_1 sono piani distinti, dunque si incontrano in una retta generata da un vettore v; si ha allora $Av = v$ e $Bv = v$, dunque $(A - B)(v) = 0$

2.

(A) Usando la seconda colonna per ottenere zeri nei posti sulla prima riga tranne che al secondo posto si conclude facilmente

(B) $t^3 - (2 + z + i)t^2 + (2z + iz + 2i)t - 2iz$

(C) z e i

(D) $z \neq 2$