UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 27/6/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ⌴⌴⌴⌴⌴⌴

1. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_2 = 7x_1 + 2x_5\}$ e $f : X \to X$ è lineare e ha 4 autovalori distinti, si può concludere che è diagonalizzabile? Spiegare.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, con prima coordinata immaginaria pura e ortogonali a $(2-i)e_1 + (3+2i)e_2$.

3. Determinare il punto di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ della retta passante per i punti $[1:4:3]$ e $[-1:3:2]$ con quella di equazione $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica $x^2 + 2kxy + 2y^2 + 6x + 6\sqrt{2}y - 1 = 0$ sia una parabola.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della quadrica $(k+1)x^2 - y^2 + kz^2 - 2x + 2z = 0$.

6. Determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = x^2 + 5xy - 4y^2 + \mathrm{e}^{2x-3y}$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Calcolare $\int_\alpha (x^2\,\mathrm{d}y - 3y\,\mathrm{d}x)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 27/6/17 — Esercizî

1. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare le matrici $A_z = \begin{pmatrix} 4+i & 2-i \\ 2+i & -3+iz \end{pmatrix}$ e $B_z = \frac{1}{2}(A_z + A_z^*)$.

(A) (4 punti) Verificare che l'unico valore reale di z per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A_z è $z = 1$.

(B) (3 punti) Calcolare gli autovalori di A_1 (ovvero di A_z per $z = 1$).

(C) (2 punti) Verificare che esiste sempre una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di B_z.

(D) (3 punti) Calcolare gli autovalori di B_{-2i} (ovvero di B_z per $z = -2i$) e una base ortogonale che la diagonalizza.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{-2t} \\ t + t^2 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 0$.

(C) (3 punti) Al variare di t determinare il segno della curvarura di α nel punto t.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta x\,\mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

(E) (2 punti) Provare che α è semplice. [La risposta a questa domanda è abbastanza difficile.]

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. Sì, X ha dimensione 4 dunque 4 autovettori relativi ai 4 autovalori distinti sono una base di X

2. $\pm\frac{1}{3\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 13i \\ 7-4i \end{pmatrix}$

3. $[2:1:1]$

4. $k=-\sqrt{2}$

5. Ellissoide per $k<-1$; paraboloide ellittico per $k=-1$; iperboloide ellittico per $-1<k<-\frac{1}{2}$; degenere per $k=-\frac{1}{2}$; iperboloide iperbolico per $-\frac{1}{2}<k<0$ e per $k>0$; paraboloide iperbolico per $k=0$

6. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; positivi

7. $\frac{17}{6}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) A_z è normale solo per $z = 1$

(B) $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{69}\right) + i$

(C) B_z è sempre hermitiana

(D) $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$; $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 \pm 3\sqrt{5} \\ 4 + 2i \end{pmatrix}$

2.

(A) La seconda componente di $a'(t)$ si annulla solo per $t = -\frac{1}{2}$, ma per tale valore non si annulla la prima

(B) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(C) Uguale a quello di $\frac{1}{2}\sqrt{3} - |t|$

(D) $\frac{1}{4}(3 - 13\,\mathrm{e}^{-2})$

(E) Posto $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, si ha $Y(s) = Y(t)$ solo per $s = t$ o per $s = -t-1$; ora $X(-t-1) = X(t)$ solo se $f(t) = t + (t+1)\,\mathrm{e}^{4t+2}$ si annulla. Inoltre f si annulla in $t = -\frac{1}{2}$, ma in tal caso $-t-1 = t$; però $f''(t) = 8(2t+3)\,\mathrm{e}^{4t+5}$ si annulla solo in $t = -\frac{3}{2}$, dunque $f'(t)$ ha un unico minimo in $t = -\frac{3}{2}$, che vale $1 - \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$; ne segue che f' è sempre positiva, dunque f è crescente, pertanto si annulla solo in $t = -\frac{1}{2}$, e la conclusione segue