UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/1/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Quali sono i polinomi di secondo grado in una indeterminata che assumono valori razionali su tutti i punti razionali?

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^7 \to \{z \in \mathbb{C}^5 : \ (1-i)z_2 + 3z_5 = 0\}$ è lineare e $f(e_1 + ie_7) = e_3 - 2ie_4$,
che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Dire quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni di $\begin{cases} (t+1)x + 3ty = 1 - 5t \\ -tx + (t-6)y = t + 4. \end{cases}$

5. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ lineare tale che
$f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$ e $f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 + 2e_3$ calcolare $f^{-1}(e_1 - 4e_2 - 5e_3)$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 - 4e_3)$, calcolare la proiezione su X di $3e_1 + e_2 + e_3$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/1/18 — Esercizî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 6x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 9 & -13 & -2 & 16 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e calcolarne la dimensione.

(B) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(C) (3 punti) Elencare tutti i vettori di X con due sole componenti non nulle e intere prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(D) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, ed estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(E) (3 punti) Trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t = \begin{pmatrix} t-4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2t \\ -6 \\ t-2 \end{pmatrix} \right), \qquad F_s : \begin{cases} (1-s)x - y + z = 2 \\ 5x + sy + 3z = 1. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n \in \mathbb{N}$ tali che E_t ha dimensione n_0 per $t = t_0$ e dimensione n per $t \neq t_0$.

(B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_t per $t = t_0$ e per $t = 3$.

(C) (2 punti) Provare che F_s ha sempre dimensione 1.

(D) (3 punti) Al variare di s determinare la posizione di F_s rispetto a E_3 (cioè a E_t per $t = 3$).

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. Quelli a coefficienti razionali

2. $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tra 3 e 6 compresi

4. Infinite per $t = 2$, nessuna per $t = -\frac{3}{4}$, una altrimenti

5. $\frac{1}{7}(17e_1 - 9e_2)$

6. -2

7. $\begin{pmatrix} -17 \\ 11 \\ 41 \end{pmatrix}$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) X è definito da un'equazione lineare non banale, dunque ha dimensione 3

(B) Poiché posto $\omega = (6, -4, 9, 2)$ si ha $\omega \cdot A = 2\omega$, si ha $f_A(X) \subset X$, dunque f è l'abbreviazione a X della restrizione a X di f_A, pertanto è lineare

(C) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(D) L'ordine è già il precedente; bisgna tenere primo, secondo e quarto vettore

(E) $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 \\ -11 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $t_0 = 5$, $n_0 = 1$, $n = 2$

(B) $\begin{cases} x + 3z = 7 \\ y + 2z = 8; \end{cases}$ $\qquad 5x - 3y + 7z = -3$

(C) La matrice incompleta del sistema che definisce F_s ha sempre rango 2

(D) Parallela per $s = 1$ e $s = -2$, altrimenti incidente in un punto