UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/1/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $p(t) = at^2 + bt + c$ e $p(n)$ è intero per ogni n intero, cosa si può dire di a, b, c?

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^8 \to \{z \in \mathbb{C}^5 : \ (2+i)z_1 + 4z_3 = 0\}$ è lineare e $f(ie_1 - e_8) = e_2 - 3ie_5$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Dire quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni di $\begin{cases} (1-t)x + (t+4)y = 1 \\ (t-4)x + 2ty = t. \end{cases}$

5. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ lineare tale che $f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 4e_3$ e $f(e_2) = -2e_1 + e_2 - e_3$ calcolare $f^{-1}(5e_1 - 2e_2 + 3e_3)$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 - e_3)$, calcolare la proiezione su X di $2e_1 - e_2 + 3e_3$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0\}$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & -2 & -13 & 16 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e calcolarne la dimensione.

(B) (3 punti) Provare che la formula $g(x) = M \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $g : W \to W$.

(C) (2 punti) Elencare tutti i vettori di W con due sole componenti non nulle e intere prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(D) (3 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate, ed estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di W.

(E) (3 punti) Trovare $[g]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t = \begin{pmatrix} -3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3t-2 \\ 1-4t \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2t+1 \\ 1-t \end{pmatrix}\right), \qquad F_s : \begin{cases} (s+3)x - y + z = 2 \\ 4x - 3y + (s+2)z = 1. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n \in \mathbb{N}$ tali che E_t ha dimensione n_0 per $t = t_0$ e dimensione n per $t \neq t_0$.

(B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_t per $t = t_0$ e per $t = -1$.

(C) (2 punti) Provare che F_s ha sempre dimensione 1.

(D) (3 punti) Al variare di s determinare la posizione di F_s rispetto a $E_{(-1)}$ (cioè a E_t per $t = -1$).

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. a, b, c oppure $a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, c$ sono interi; queste condizioni sono anche sufficienti oltre che necessarie

2. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Tra 4 e 7 compresi

4. Infinite per $t = -2$, nessuna per $t = \frac{8}{3}$, una altrimenti

5. $\frac{1}{7}(e_1 - 17e_2)$

6. 1

7. $\begin{pmatrix} 22 \\ 19 \\ -17 \end{pmatrix}$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli eserciziî

5. ♡

1.

(A) W è definito da un'equazione lineare non banale, dunque ha dimensione 3

(B) Poiché posto $\omega = (6, 9, -4, 2)$ si ha $\omega \cdot M = 2\omega$, si ha $f_M(W) \subset W$, dunque g è l'abbreviazione a W della restrizione a W di f_A, pertanto è lineare

(C) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

(D) L'ordine è già il precedente; bisgna tenere primo, secondo e quarto vettore

(E) $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & -5 \\ -11 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $t_0 = 4$, $n_0 = 1$, $n = 2$

(B) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ y + 3z = 7; \end{cases}$ $\quad 3x - 4y + 7z = 2$

(C) La matrice incompleta del sistema che definisce F_s ha sempre rango 2

(D) Parallela per $s = -2$ e $s = 3$, altrimenti incidente in un punto