UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 15/2/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[6e_1+7e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $[-13e_1+16e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Se $\mathbb{C}^{11} = W \oplus Z$ con Z di dimensione 4, e sono dati 2 vettori linearmente indipendenti di W, quanti bisogna aggiungerne per avere una base di W?

3. Possono esistere in $\mathbb{R}^5$ sottospazî X, Y, Z con X e Y di dimensione 2, Z di dimensione 3, $X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = \{0\}$? Spiegare perché no oppure fare un esempio se sì.

4. Risolvere $\begin{cases} 5x+2y-z=13 \\ 4x-y-2z=9 \\ -2x+7y+4z=-1. \end{cases}$

5. Data $A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $\det(A) = \frac{1}{11}$, calcolare $\det(3v_1+4v_2, -v_1+2v_3, -3v_2+v_3)$.

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \mathrm{Span}(4e_1+3e_2-e_3,\ 5e_1-2e_2+3e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1-e_2+e_3)$, calcolare la proiezione su X di $6e_1+2e_2+e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 15/2/18 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare X il sottospazio X di equazioni $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ e il vettore $v = 2e_1 - 9e_2 + e_3 + 12e_4$.

(A) (1 punto) Provare che v appartiene a X.

(B) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X aventi una coordinata nulla e le altre intere prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(C) (2 punti) Provare che comunque si prendano due dei vettori trovati nel punto (B) si ottiene una base di X.

Considerare ora la base $\mathcal{B}$ di X ottenuta ordinando i vettori trovati nel punto (B) in modo che sia crescente la somma delle coordinate, e prendendone il secondo e il terzo. Definire inoltre l'applicazione lineare $f : X \to X$ tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

(D) (3 punti) Determinare $[v]_{\mathcal{B}}$.

(E) (3 punti) Calcolare $f(v)$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Stabilire al variare di t quante tali f esistono.

(B) (4 punti) Stabilire per quali t la f esiste unica ma non è invertibile.

(C) (4 punti) Verificato che per $t = 2$ la f esiste unica ed è invertibile, calcolare $f(e_1)$ ed $f^{-1}(e_1)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. 5

3. Sì: $X = \mathrm{Span}(e_1, e_2),\ Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_3, e_2 + e_4),\ Z = \mathrm{Span}(e_3, e_4, e_5)$

4. $x = 2 + 5t,\ y = 1 - 6t,\ z = -1 + 13t$

5. 2

6. $0,\ -6,\ 8,\ 38$

7. $21e_1 - 13e_2 + 16e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Soddisfa le equazioni

(B) $\begin{pmatrix} 2 \\ -51 \\ -29 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -26 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 26 \\ 51 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) I vettori sono a coppie non proporzionali

(D) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{5}(5e_1 - 124e_2 + 10e_3 + 33e_4)$

2.

(A) Infinite per $t = -2$, nessuna per $t = \frac{7}{4}$, una altrimenti

(B) $t = \frac{8}{5}$

(C) $-26e_1 - 18e_2 - 25e_3$, $7e_1 - 9e_2 - 11e_3$