



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Sapendo che un predicato $\mathcal{P}(n)$ relativo a $n \in \mathbb{N}$ è vero per $n = 0$ e che $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n + 2)$, si conclude che $\mathcal{P}(n)$ è sempre vero? Spiegare perché è vero oppure fare un esempio in cui non lo è.

2. Trovare la base \mathcal{B} di \mathbb{R}^2 tale che $[8e_1 + 3e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^9 : 7x_1 = 8x_3\}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^5$ è lineare surgettiva, che dimensione può avere un sottospazio Y di X tale che $Y + \text{Ker}(f) = X$?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x + 4y - z = 5 \\ 5x + y + 2z = 3 \\ x + 7y - 4z = 7. \end{cases}$

5. Dire per quali t la matrice $\begin{pmatrix} 3-t & 1+t \\ t-4 & 2+t \end{pmatrix}^{-1}$ ha traccia $\frac{1}{2}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Dati $X = \text{Span}(e_1 + 2e_2, 3e_1 + e_3)$ e $Y = \text{Span}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, 3e_1 + 2e_2 + e_4)$ trovare la proiezione su X di $-6e_1 + 9e_2 + 2e_3 + 3e_4$ rispetto alla decomposizione $X \oplus Y = \mathbb{R}^4$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. In \mathbb{R}^4 considerare il sottospazio $X : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

(A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X con una coordinata nulla e le altre intere prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Provare che scelti comunque due dei vettori del punto (A) si ottiene una base di X .

Ordinare ora i vettori del punto (A) in modo che sia crescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, ed estrarre dai vettori così ordinati una base \mathcal{B} di X , definendo poi l'applicazione lineare $f : X \rightarrow X$ tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(C) (3 punti) Provare che f è invertibile.

(D) (3 punti) Provare che $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a X e calcolare $f(x)$.

2. In \mathbb{R}^3 al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare i sottospazi affini

$$E_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+3t \\ 4t+3 \\ 1-2t \end{pmatrix} \right), \quad F_s : \begin{cases} x + sy + (s-1)z = 3 \\ sx + y - sz = s + 2. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Calcolare la dimensione di E_t al variare di t , esibendone equazioni cartesiane quando non è un piano.

(B) (4 punti) Provare che F_s è sempre una retta, esibendone equazioni parametriche per $s = -1$

(C) (4 punti) Discutere la posizione reciproca di E_1 ed F_s al variare di s .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte ai quesiti

5. \diamond 1. No: $\mathcal{P}(n) = \text{"}n \text{ è pari"}$ 2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 8 compresi

4. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = -1 - 11t \\ z = -3 - 17t \end{cases}$ 5. $t = 0$ e $t = 2$ 6. -5 7. $-5e_1 + 8e_2 - 3e_3$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond



Soluzioni degli esercizi

5. \diamond

1.

$$(A) \begin{pmatrix} 5 \\ -26 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 37 \\ 0 \\ 1 \\ -26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 37 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(B) X ha dimensione 2 e i vettori sono a coppie linearmente indipendenti(C) $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è invertibile, dunque f lo è

$$(D) [x]_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; f(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.

(A) Dimensione 2 per $t \neq 3$, dimensione 1 per $t = 3$; equazioni $\begin{cases} x + 2z = -3 \\ y + 3z = -3 \end{cases}$ (B) La matrice del sistema che definisce F_s ha sempre rango 2

$$F_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C) Piano e retta paralleli per $s = -1$ e $s = 2$, altrimenti incidenti in un punto