UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 11/9/18 — Quesiti

Nome __________ **Cognome** __________ **Matricola** ______

1. Posto $A = \begin{pmatrix} 5 & k \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ dire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha $p_A(3) = 0$.

2. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ k+1 & k^2+1 & 0 \\ k+2 & k-2 & k^2+k-1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî e ortogonali a $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\begin{pmatrix} k+1 & k^2-1 \\ k+5 & 1-k \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 + y^2 - 12z^2 + 8xy + 18xz - 2yz + 2y = 0$. Spiegare.

6. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[t-1 : 3 : 1]$ e $[6 : -1 : t+2]$ contiene il punto $[5 : -1 : 6]$.

7. Una forma chiusa su $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| > 1\}$ è necessariamente esatta? Spiegare.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 11/9/18 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2k^2+k-10 & 2(9-k^2) \\ k^2+k-6 & -k^2-k+11 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A) = -k^3+k^2+3k-2$.

(B) (3 punti) Trovare gli autovalori di A.

(C) (4 punti) Stabilire per quali k la A sia diagonalizzabile.

(D) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A, e determinare i segni dei corrispondenti autovalori.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin(2s) - \cos(s) \\ 1-2s+s^2-s^3 \\ s \cdot \mathrm{e}^s \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s=0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s=0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta z\,\mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $k = -1$

2. $k \neq \pm 2$

3. $\pm \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

4. $k = 3$ e $k = -2$

5. Paraboloide iperbolico

6. $t = 5$ e $t = -15$

7. No: la forma $\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ è chiusa ma non esatta sull'insieme assegnato

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) Sostituire la prima riga con sé stessa meno 2 volte la seconda, poi raccogliere $k-2$ dalla prima riga e sostituire la seconda colonna con sé stessa più 2 volte la prima, trovando $(k-2)(-k^2-k+1)$

(B) $2-k$ e k^2+k-1

(C) $k \neq 1$

(D) $k=-3$ positivi; $k=\frac{8}{3}$ discordi

2.

(A) La seconda componente ha derivata sempre strettamente negativa

(B) $t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa=\frac{1}{3}$, $\tau=\frac{28}{27}$

(D) $8(\mathrm{e}-3)$